الاشـــــتـــقاقـيـة

✠ **الاشتقاقية:** f دالة معرفة على مجال I يشمل العدد الحقيقي x_0 و (C_f) تمثيلها البياني .

♠ اذا كانت $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l$ أو $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l$ (حيث l عدد حقيقي) $f'(x_0)=l$
فإن الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0
♠ التفسير البياني : المنحنى (C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ مماسا معامل توجيهه $f'(x_0)$
و معادلة هذا المماس هي من الشكل $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

♠ اذا كانت $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$ أو $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0
♠ التفسير البياني : (C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ مماسا يوازي حامل محور الفواصل معادلته $y=f(x_0)$

♠ اذا كانت $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\pm\infty$ أو $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\pm\infty$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند x_0
♠ التفسير البياني : (C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس يوازي حامل محور الترتيب معادلته $x=x_0$

♠ اذا كانت $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l_1$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l_2$ وكان $l_1\neq l_2$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند x_0
♠ التفسير البياني : (C_f) يقبل نصفي مماسين عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ وتدعى A نقطة زاوية .

✠ **مشتقات دوال مألوفة :**

$f(x)$	$f'(x)$	مجالات قابلية الاشتقاق
k (k عدد حقيقي)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$x^n\ (n\geq 2; n\in\mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

✠ **المشتقات و العمليات على الدوال :** f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي

الدالة	$f+g$	kf	$f\times g$	$g=\dfrac{1}{f}$ (مع $f\neq 0$)	$\dfrac{f}{g}$ (مع $g\neq 0$)	$g=\sqrt{f}$ (مع $f\geq 0$)
المشتقة	$f'+g'$	kf'	$f'\times g+g'\times f$	$g'=-\dfrac{f'}{f^2}$	$\dfrac{f'.g-g'.f}{g^2}$	$g'=\dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$

✠ **مشتقة بعض الدوال :**

الدالة	f^n	$f(x)=g(ax+b)$	$f(x)=\sin(ax+b)$	$f(x)=\cos(ax+b)$	$(g\circ f)(x)$
المشتقة	$nf'f^{n-1}$	$f'(x)=ag'(ax+b)$	$f'(x)=a\cos(ax+b)$	$f'(x)=-a\sin(ax+b)$	$f'(x)\times g'(f(x))$

✠ **نقطة الانعطاف :**

اذا انعدمت المشتقة الثانية $f''(x)$ من أجل x_0 مغيرة إشارتها بجوار x_0 فإن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف $A(x_0;f(x_0))$
♠ التفسير الهندسي : المماس (T) للمنحني (C_f) عند نقطة الانعطاف $A(x_0;f(x_0))$ يخترق المنحني (C_f) .

سلسلة تمارين الاشتقاقية

✓ التمرين 01 ◄

♠ ادرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند x_0 ماذا تستنتج ؟ ثم فسر النتيجة هندسيا في كل حالة من الحالات التالية :

♦ [1] $f(x)=x^2-x$; $x_0=-1$
♦ [2] $f(x)=x^3-2x^2+2$; $x_0=0$
♦ [3] $f(x)=\sqrt{x-2}$; $x_0=2$
♦ [4] $f(x)=2x|x-1|$; $x_0=1$

✓ التمرين 02 ◄

♠ f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كمايلي : $f(x)=|x|+\dfrac{4}{x+1}$ ، و (C_f) تمثيلها البياني في معلم .

♦ [1] اكتب f دون رمز القيمة المطلقة .

♦ [2] احسب $\lim\limits_{h\overset{>}{\to}0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ و $\lim\limits_{h\overset{<}{\to}0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ ماذا تستنتج ؟ ثم اعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة .

♦ [2] اكتب معادلتي المماسين $(\triangle_1)$ و $(\triangle_2)$ للمنحني (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$.

✓ التمرين 03 ◄

♠ ادرس تغيرات الدالة f على مجموعة تعريفها (D_f) في كل حالة من الحالات التالية :

♦ [1] $f(x)=2x^3-3x^2+7$; $D_f=\mathbb{R}$
♦ [2] $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{(x+1)^2}$; $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$
♦ [3] $f(x)=x-1+\dfrac{4}{x+1}$; $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$
♦ [4] $f(x)=x-\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$; $D_f=]-1;+\infty[$

♠ احسب $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ في كل حالة من الحالات التالية :

♦ [1] $g(x)=f(3x+1)$ ♦ [2] $g(x)=f(x^2)$ ♦ [3] $g(x)=f(x^3)$ ♦ [4] $g(x)=f(\dfrac{1}{x})$

✓ التمرين 04 ◄

♠ نعتبر الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ كما يلي: $f(x)=a+\dfrac{b}{x-3}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

♦ [1] عيّن العددين a و b اذا علمت أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور التراتيب في النقطة التي ترتيبتها $\dfrac{4}{3}$ ويقبل المستقيم الذي معادلته $y=2$ مقارب للمنحني (C_f) .

♠ نفرض فيما يلي أن : $a=2$ و $b=2$.

♦ [2] ادرس تغيرات الدالة f

♦ [3] عيّن احداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الاحداثيات .

♦ [4] بيّن ان المنحني (C_f) يقبل مماسين معامل توجيه كلا منهما يساوي -2 .

✓ التمرين 05 ◄

♠ f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=ax^3+bx+c$. حيث $a,\ b,\ c$ أعداد حقيقية .

[1] ♦ عيّن الأعداد الحقيقية $a,\ b,\ c$ علما أنّ التمثيل البياني (C_f) الممثل للدالة f يشمل النقطة $A(1;-3)$ ويقبل في النقطة $B(0;1)$ مماسا يوازي المستقيم $(\triangle)$ الذي معادلته $y=-6x+1$

♠ g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=ax^3+bx^2+1$. حيث a و b عددان حقيقيان.

[1] ♦ عيّن العددين a و b علما أنّ التمثيل البياني (C_g) الممثل للدالة g يقبل في النقطة $A(1;2)$ مماسا يوازي محور الفواصل .

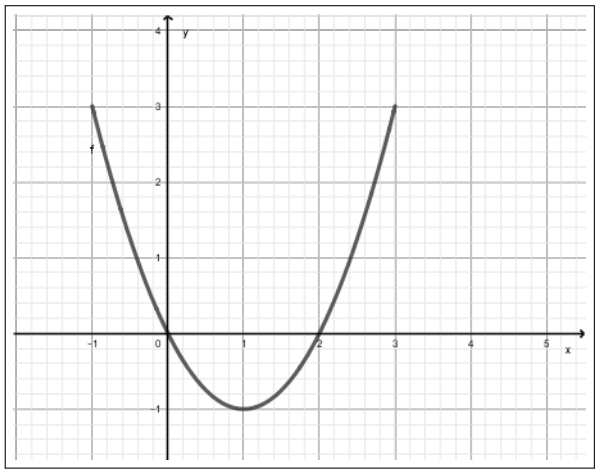
[2] ♦ بين أن للمنحنى (C_g) نقطة إنعطاف w يطلب تعيينها , ثم اكتب معادلة المماس لـ (C_g) عندها .

♠ h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=\dfrac{3x^3+ax+b}{x^2+1}$. حيث a و b عددان حقيقيان.

[1] ♦ عيّن العددين a و b علما أنّ التمثيل البياني (C_h) الممثل للدالة h يقبل في النقطة $A(0;3)$ مماسامعامل توجيهه 4 .

✓ التمرين 06 ◄

♠ f الدالة المعرفة على المجال $[-1;3]$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.



♠ بقراءة بيانية ♠

[1] ♦ شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-1;3]$

[2] ♦ عيّن اشارة $f(x)$ على المجال $[-1;3]$.

[3] ♦ عيّن اشارة $f'(x)$ على المجال $[-1;3]$.

♠ نعتبر الدالة g المعرفة علة المجال $[-1;3]$ كما يأتي : $g(x)=[f(x)]^2$

[4] ♦ احسب $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ ، ثم استنتج اشارة $g'(x)$.

[5] ♦ شكل جدول تغيرات الدالة g .

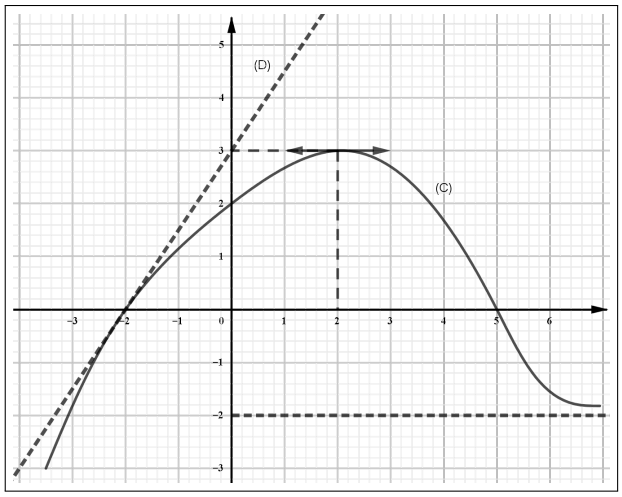
♠ نعتبر الدالة h المعرفة علة المجال $[-1;3]$ كما يأتي : $h(x)=[f(x)]^3$

[5] ♦ احسب $h'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ ، ثم استنتج اشارة $h'(x)$.

[7] ♦ شكل جدول تغيرات الدالة h .

✓ التمرين 07 ◄

♠ المنحني (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$.



♠ بقراءة بيانية عيّن ♠

[1] ♦ $f(5)=$ ..... [2] ♦ $f(2)=$ ..... [3] ♦ $f'(2)=$ ..... [4] ♦ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$ ....

$f(0)=$ .....
$f(-2)=$ .....
$f'(-2)=$ .....
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$ ....

[5] ♦ معادلة المماس (D) : $y=\ldots x+\ldots$

[6] ♦ وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل

[7] ♦ حسب قيم x إشارة $f(x)$.

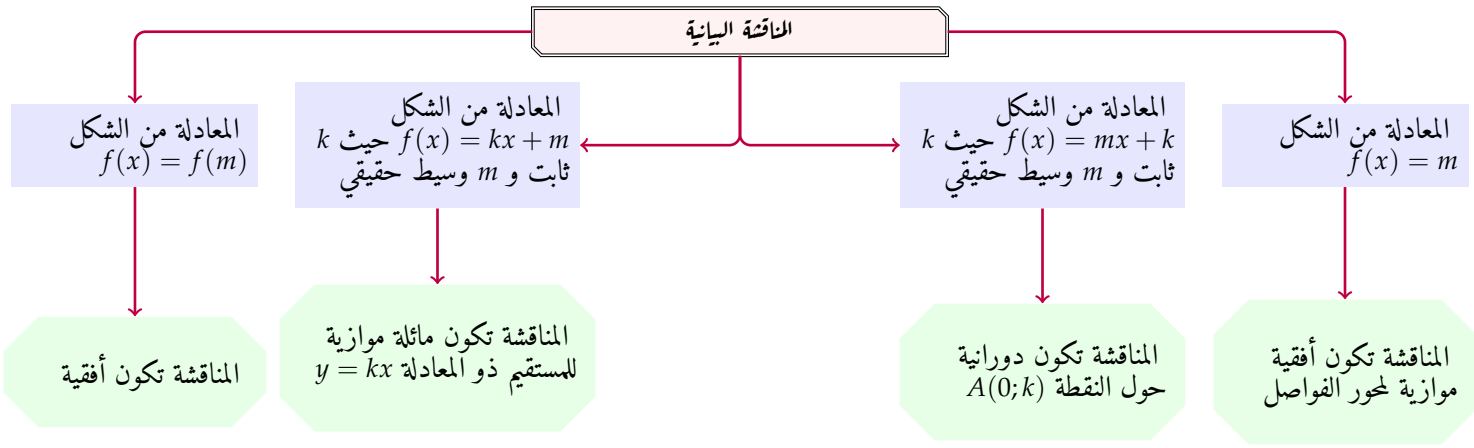
[8] ♦ حسب قيم x إشارة $f'(x)$.

[9] ♦ شكل جدول تغيرات الدالة f .

[10] ♦ حلول المعادلة : $f(x)=2$.

[11] ♦ حلول المتراجحة : $f(x)\geq 2$.

[12] ♦ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي : m عدد و اشارة حلول المعادلة : $f(x)=m$.



الدالة الزوجية:

إذا كانت $f(x)=f(-x)$ نقول أن الدالة f زوجية وتمثيلها البياني متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب .

الدالة الفردية:

إذا كانت $f(-x)=-f(x)$ نقول أن الدالة f فردية وتمثيلها البياني متناظر بالنسبة لمركز المعلم.

الدالة الدورية:

إذا كانت $f(x+p)=f(x)$ نقول أن الدالة f دورية وتمثيلها البياني يعيد نفسه عند كل مجال طوله p .

مركز التناظر:

إذا كانت $f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$ نقول أن التمثيل البياني للدالة f يقبل مركز تناظر هو النقطة $A(\alpha;\beta)$.

محور التناظر:

إذا كانت $f(2\alpha-x)=f(x)$ نقول أن التمثيل البياني للدالة f يقبل محور تناظر هو المستقيم ذو المعادلة $x=\alpha$.

التقاطع مع محور الفواصل:

لتعيين نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل نحل المعادلة $f(x)=0$ ونجد فواصل هذه النقط مع العلم أن ترتيباتها معدومة.

التقاطع مع محور التراتيب:

لتعيين نقط تقاطع (C_f) مع محور التراتيب نحسب $f(0)$ ونجد ترتيبات هذه النقط مع العلم أن فواصلها معدومة.

استنتاج تمثيل بياني من آخر:

1. إذا كانت $h(x)=|f(x)|$ فإن (C_h) منطبق على (C_f) لما يكون (C_f) فوق محور الفواصل.
   و (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل لما يكون (C_f) تحت محور الفواصل.
2. إذا كانت $h(x)=f(|x|)$ فإن (C_h) منطبق على (C_f) لما يكون $x>0$.
   و (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب لما يكون $x<0$.
3. إذا كانت $h(x)=-f(x)$ فإن (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.
4. إذا كانت $h(x)=f(-x)$ فإن (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب.
5. إذا كانت $h(x)=f(x+a)+b$ فإن (C_h) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\binom{a}{b}$.
6. إذا كانت $h(x)=-f(-x)$ فإن (C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة لمركز المعلم.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM