مجلة العبقري في الرياضيات (الأعداد المركبة والتحويلات النقطية)

الملخص // الشعبة: علوم تجريبية؛ تقني رياضي.

ملخص: حول الأعداد المركبة// التحضير الجيد بكالوريا// الشعبة: علوم تج؛ تر.

1 تعاريف ونتائج:

❶ تعاريف

كل عدد مركب z يُكتب من الشكل $\boxed{z=x+iy}$،
حيث x وَ y **عددان حقيقيان**
وَ i عدد تخيّلي يُحقق $\boxed{i^2=-1}$.

ملاحظات وترميز:

- الكتابة $\boxed{z=x+iy}$، تسمى **الشكل الجبري** لـz.
- x يسمى **الجزء الحقيقي** لـz ونرمز له بـ: $\boxed{x=Re(z)}$.
- y يسمى **الجزء التخيلي** لـz ونرمز له بـ: $\boxed{y=Im(z)}$.
- إذا كان: $Im(z)=0$؛ فإنّ: $z=x$ فنقول أنّ: z **حقيقي**.
- إذا كان: $Re(z)=0$؛ فإنّ: $z=yi$ فنقول أنّ: z **تخيلي صرف (أو تخيلي بحت)**.
- إذا كان: $Re(z)=Im(z)=0$؛ فإنّ: $z=0$ إذن: 0 هو في آنٍ واحد **حقيقي وَتخيلي صرف**.

نتيجة:
$\boxed{z=0}$، **معناه:** $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$.

❷ تساوي عددين مركبين

تعريف:
يكون عددان مركبان z و z' **متساويين**
إذا وفقط إذا كان لهما
- نفس **الجزء الحقيقي**
- وَنفس **الجزء التخيلي**.

بوضع:
$\boxed{z=x+iy}$،
وَ
$\boxed{z'=x'+iy'}$.

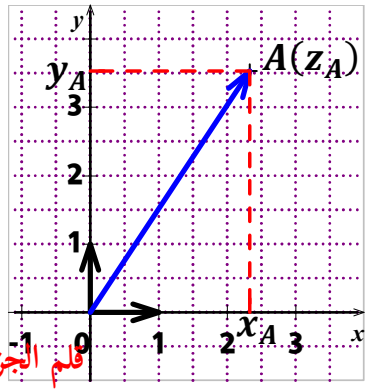
$\boxed{z=z'}$، **معناه:** $\begin{cases}x=x'\\y=y'\end{cases}$.

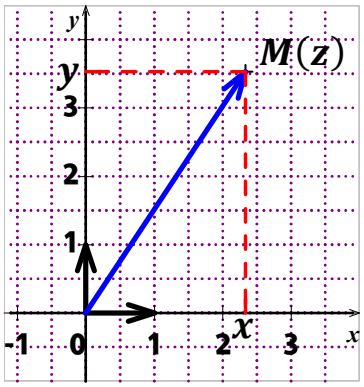
❸ التمثيل الهندسي لعدد مركب

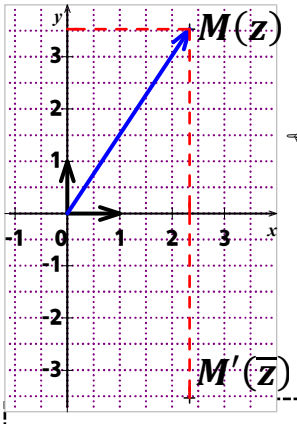
- نُنسب المستوي إلى **معلم متعامد ومتجانس** $(O;\vec{u};\vec{v})$.
- يسمى كل من M وَ $\overrightarrow{OM}$ **صورة** z.
- ويسمى z **لاحقة** كل من M وَ $\overrightarrow{OM}$؛ نكتب: $\boxed{M(z)}$؛ $\boxed{\overrightarrow{OM}(z)}$.

يُمثل العدد المركب
$\boxed{z=x+iy}$
بالنقطة
$\boxed{M(x;y)}$.

نتائج:
- محور **الفواصل** (محور **الأعداد الحقيقية**)
- محور **التراتيب** (محور **الأعداد التخيلية**)
- **لاحقة الشعاع** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ هي: z_A+z_B
- **لاحقة الشعاع** $\overrightarrow{AB}$ هي: $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$
حيث: $A(z_A)$ وَ $B(z_B)$
z $(Re(z_A)=x_A$ وَ $Im(z_A)=y_A)$







2 مرافق عدد مركب:

1 مرافق عدد مُركب

صورتا العددين المُركبين **المترافقين**؛ **متناظرتان** بالنسبة إلى **محور الفواصل**

مُرافق العدد المركب $z = x + iy$، هوَ العدد المُركب $\overline{z} = x - iy$.

(نقوم **بتغيير إشارة الجزء التخيلي** فقط)

2 خواص المُرافق

خواص مباشرة من التعريف

① $\overline{\overline{z}} = z$

② $z + \overline{z} = 2x$

③ $z - \overline{z} = 2iy$

④ $z.\overline{z} = x^2 + y^2$

المُرافق والعمليات

① $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

② $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$

③ $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$

④ $(k \in \mathbb{R})$ $\overline{kz} = k\overline{z}$

⑤ $(z' \neq 0)$ $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

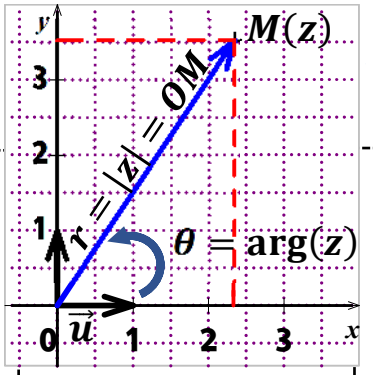
⑥ $(z \neq 0$ و$k \in \mathbb{R})$ $\overline{\left(\frac{k}{z}\right)} = \frac{k}{\overline{z}}$

⑦ $(n \in \mathbb{N}^*)$ $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

- z حقيقي، **معناه:** $\overline{z} = z$.
- z تخيلي صرف، **معناه:** $\overline{z} = -z$.

☞ **يُمكن** استخدام **المُرافق** لإثبات أنّ z **حقيقي**، **أو تخيلي صرف**.

3 طويلة وعُمدة عدد مركب:



الطويلة

1 تعريف

$z = x + iy \neq 0$ صورته M.

طويلة z:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = OM$

- في حالة: $z = 0$، فإنّ: $|z| = 0$.

2 خواص الطويلة

خواص الطويلة

① $|\overline{z}| = |-z| = |z|$

② $z.\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

③ $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ $(z' \neq 0)$

④ $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ $(z \neq 0)$

⑤ $|z.z'| = |z|.|z'|$

⑥ $|z^n| = |z|^n$ $(n \in \mathbb{N})$

3 إضافات

- ☹ $|z + z'| \neq |z| + |z'|$ وَ $|z - z'| \neq |z| - |z'|$.
- ☺ $g(\overline{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$ وَ $\arg(-z$

العُمدة

1 تعريف

عُمدة z:

$\theta = \arg(z) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = \cdots + 2k\pi$

$\arg(z) \equiv \cdots [2\pi]$ ونكتب: $(k \in \mathbb{Z}$ حيث

- ...، هو **قيس بالراديان** للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.

2 خواص العُمدة

خواص العُمدة

(**تذكّر:** خواص " ln ")

① $\arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z')$

② $(z' \neq 0)$ $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

③ $(z \neq 0)$ $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$

④ $(n \in \mathbb{N}^*)$ $\arg(z^n) = n\arg(z)$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

4 الشكلان المثلثي والأسي لعدد مركب:

لكتابة عدد مركب z على **الشكل المثلثي** أو **الأسّي**، نحتاج إلى **حساب طويلته** r و**عُمدته** θ.

❶ الإنتقال من شكل إلى آخر

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} \end{cases}$$ ، **نستنتج:** $\theta = \arg(z) = \cdots + 2k\pi$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$)

الشكل الجبري	الشكل المثلثي	الشكل الأسي
$z = x + iy$	$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$	$z = re^{i\theta}$

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\quad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (ترميز أولر)

قواعد الحساب على الشكل الأسّي

(دستور **موافر**) $n \in \mathbb{N}^*$ حيث؛ $\left(e^{i\theta}\right)^{n} = e^{in\theta}$

نجد:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{n} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

إذن: $z^{n} = \left(re^{i\theta}\right)^{n} = r^{n}e^{in\theta}$؛ (حيث $n \in \mathbb{N}^*$)

ومنه:

$$r^{n} = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{n} = r^{n}[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$$

قواعد الحساب على الشكل الأسّي

(**تذكّر:** خواص " exp ")

① $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$

② $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

③ $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

❷ تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث z^n عدد مركب #خاص

z^n	حقيقي	حقيقي موجب	حقيقي سالب	حيث
معناه:	$\arg(z^n) = k\pi$	$\arg(z^n) = 2k\pi$	$\arg(z^n) = \pi + 2k\pi$	(حيث $k \in \mathbb{Z}$)
أي:	$n\theta = k\pi$	$n\theta = 2k\pi$	$n\theta = \pi + 2k\pi$	

z^n	تخيلي صرف	تخيلي صرف و $Im(z^n) > 0$	تخيلي صرف و $Im(z^n) < 0$	حيث
معناه:	$\arg(z^n) = \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\arg(z^n) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$\arg(z^n) = \pi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	(حيث $k \in \mathbb{Z}$)
أي:	$n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$	$n\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$n\theta = \pi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

❸ البحث عن عُمدة عدد ملاكب (استعمال الدائرة المثلثية وأقياس الزوايا الشهيرة)

استنتاج الطويلة والعُمدة في حالات خاصة

- في حالة: $z = x > 0$، فإنّ: $|z| = |x| = x$ و $arg(z) = 0 + 2k\pi$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$)
- في حالة: $z = x < 0$، فإنّ: $|z| = |x| = -x$ و $arg(z) = \pi + 2k\pi$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$)
- في حالة: $z = iy$ و $y > 0$، فإنّ: $|z| = |y| = y$ و $arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$)
- في حالة: $z = iy$ و $y < 0$، فإنّ: $|z| = |y| = -y$ و $arg(z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$)

❹ دساتير التحويل

نُستعمل للتحويل إلى الشكل المثلي، ولها إستعمالات أخرى:

① $\begin{cases}\cos(x+2k\pi)=\cos(x)\\ \sin(x+2k\pi)=\sin(x)\end{cases}$; $(k \in \mathbb{Z})$

② $\begin{cases}\cos(-x)=\cos(x)\\ \sin(-x)=-\sin(x)\end{cases}$

③ $\begin{cases}\cos(\pi+x)=-\cos(x)\\ \sin(\pi+x)=-\sin(x)\end{cases}$

④ $\begin{cases}\cos(x-\pi)=-\cos(x)\\ \sin(\pi-x)=\sin(x)\end{cases}$

⑤ $\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin(x)\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos(x)\end{cases}$

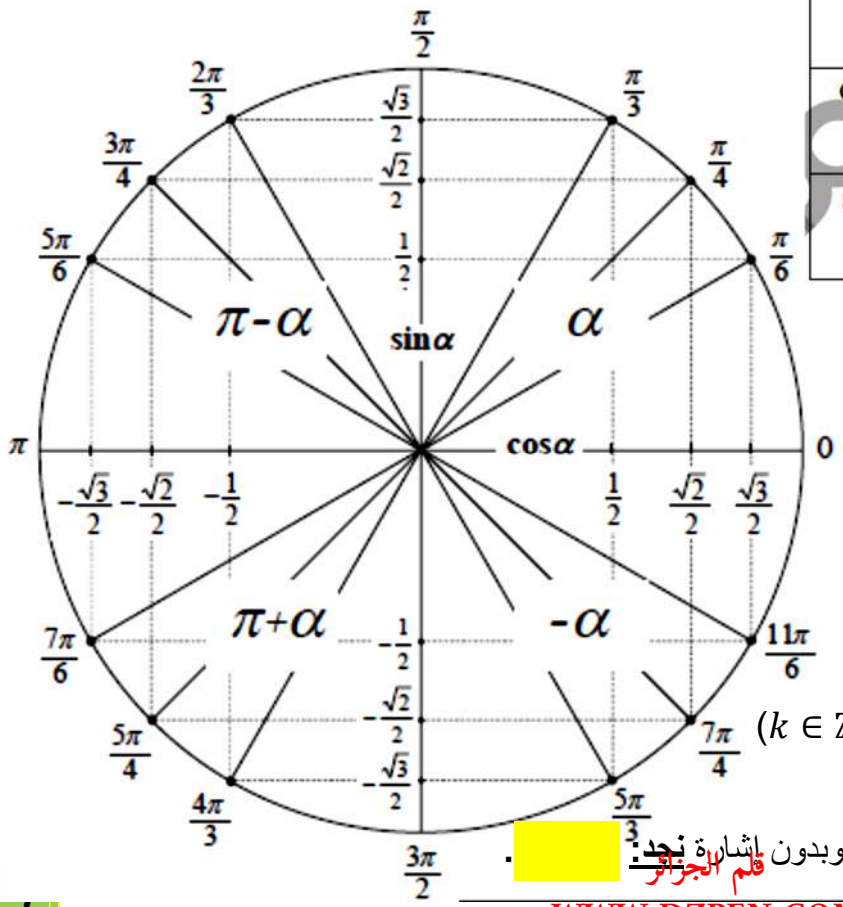
⑥ $\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)\end{cases}$

❺ الدائرة المثلثية وجدول النسب المثلثية لأقياس شهيرة (تستعمل في حساب العُمدة)

الجدول

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

الدائرة



$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}\cos\theta = \frac{x}{r}\\ \sin\theta = \frac{y}{r}\end{cases}$$

نجد:

$$\begin{cases}\theta = \arg(z) = \alpha + 2k\pi\\ \theta = \arg(z) = \pi - \alpha + 2k\pi\\ \theta = \arg(z) = \pi + \alpha + 2k\pi\\ \theta = \arg(z) = -\alpha + 2k\pi\end{cases}$$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$)؛

صورة z تقع في **الرُبع** ...؛ حسب إشارة x وَ y. وبدون إشارة **نجد**: .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

❻ حل بعض المعادلات في $\mathbb{C}$

معادلات من الشكل az^2+bz+c (حيث $a\neq 0$)

مميزها:

$\boxed{\Delta = b^2-4ac}$

① إذا $\boxed{\Delta = 0}$

تقبل حل مضاعف

$\boxed{z_0 = -\frac{b}{a}}$، ومنه

التحليل:

$az^2+bz+c = a(z-z_0)^2$

② إذا $\boxed{\Delta \neq 0}$،

$\boxed{\Delta = (w_1)^2 = (w_2)^2}$

$w_1 = -w_2$ وَهما **الجذران التربيعيان** لـΔ.

إيجاد أحد الجذران التربيعيان لـΔ:

$\boxed{\Delta = \alpha + i\beta}$،

نقوم بحل الجملة التالية

$$\begin{cases} x^2+y^2 = |\Delta| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} & (1) \\ x^2-y^2 = Re(\Delta) = \alpha & (2) \\ 2xy = Im(\Delta) = \beta & (3) \end{cases}$$

ملاحظة: باستعمال المعادلة (3)؛ تُحدد **إشارة** x وَy

$w_1 = x_1+iy_1$ وَ$w_2 = -w_1 = x_2+iy_2$.

الحلان هما $\boxed{z_1 = \frac{-b-w_1}{2a}}$، وَ$\boxed{z_2 = \frac{-b+w_1}{2a}}$

نأخذ **أحد الجذرين** لإيجاد **الحلان**.

التحليل:

$\boxed{az^2+bz+c = a(z-z_1)(z-z_2)}$

هام: في حالة a، b وَc أعداد حقيقية، فإنّ: **الحلان مترافقان**؛ أي: $\boxed{z_1 = \overline{z_2}}$.

5 توظيف الأعداد المركبة في الهندسة:

❶ التفسير الهندسي للطويلة والعُمدة

الطويلة والعمدة	التفسير الهندسي
① طويلة وعُمدة z (z **لاحقة** كل من **النقطة** M؛ وَ**الشعاع** $\overrightarrow{OM}$)	① $\begin{cases} \lvert z\rvert = OM \\ \arg(z) = (\vec{u};\overrightarrow{OM}) \end{cases}$
② طويلة وعُمدة z_A (z_A **لاحقة** كل من **النقطة** A؛ وَ**الشعاع** $\overrightarrow{OA}$)	② $\begin{cases} \lvert z_A\rvert = OA \\ \arg(z_A) = (\vec{u};\overrightarrow{OA}) \end{cases}$
③ طويلة وعُمدة (z_B-z_A) ($z_{\overrightarrow{AB}} = z_B-z_A$ **لاحقة** **الشعاع** $\overrightarrow{AB}$)	③ $\begin{cases} \lvert z_B-z_A\rvert = AB \\ \arg(z_B-z_A) = (\vec{u};\overrightarrow{AB}) \end{cases}$

④ طويلة و عُمدة $\frac{z_B}{z_A}$ $(A \neq O$ وَ $B \neq O)$ (**لاحظ أنّ:** $\frac{z_B}{z_A} = \frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}$)	④ $\begin{cases} \left\|\frac{z_B}{z_A}\right\| = \frac{\|z_B\|}{\|z_A\|} = \frac{OB}{OA} \\ \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) \end{cases}$؛ (المقام أولا في arg)
⑤ طويلة و عُمدة $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ $(A \neq C$ وَ $A \neq B)$	⑤ $\begin{cases} \left\|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right\| = \frac{\|z_C - z_A\|}{\|z_B - z_A\|} = \frac{AC}{AB} \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \end{cases}$؛ (المقام أولا بالعكس في arg)

❷ لاحقة المرجح

النقطة (المرجح)	لاحقتها
① لاحقة النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ (I **مرجح** A وَ B بنفس المعاملات؛ وتُأخذ 1)	① $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$
② لاحقة النقطة H مركز ثقل المثلث ABC (H **مرجح** A ، B وَ C بنفس المعاملات؛ وتُأخذ 1)	② $z_H = \frac{z_A + z_B + z_C}{2}$
③ لاحقة النقطة G **مرجح** الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma)\}$	③ $z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$

❸ تداور النقط

إذا كان	نستنتج أنّ
① $\|z_A\| = \|z_B\| = \|z_C\| = \|z_D\| = r$ **معناه:** $OA = OB = OC = OD = r$	① النقط A، B، C وَ D **تنتمي إلى نفس الدّائرة** ذات المركز O ونصف القطر r.
② $\|z_A - z_\omega\| = \|z_B - z_\omega\| = \|z_C - z_\omega\| = \|z_D - z_\omega\| = r$ **معناه:** $\omega A = \omega B = \omega C = \omega D = r$	② النقط A، B، C وَ D **تنتمي إلى نفس الدّائرة** ذات المركز ω ونصف القطر r.

❹ إستقامية النقط

إذا كان	نستنتج أنّ
① $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = k \in \mathbb{R}$؛ (حيث $B \neq A$) **معناه:** $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(k) = k\pi$؛ (حيث $k \in \mathbb{Z}$) **أي:** $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = k\pi$؛ (حيث $k \in \mathbb{Z}$) **زاوية مستقيمة**	① النقط A، B وَ C **في إستقامية.**
② $\frac{z_B}{z_A} = k \in \mathbb{R}$؛ (حيث $A \neq O$) $\left(\frac{z_B}{z_A} = \frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = k\right)$ **معناه:** $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \arg(k) = k\pi$؛ (حيث $k \in \mathbb{Z}$) **أي:** $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = k\pi$؛ (حيث $k \in \mathbb{Z}$) **زاوية مستقيمة**	② النقط O، A وَ B **على إستقامة واحدة.**

❺ توازي شعاعين أو مستقيمين

إذا كان	نستنتج أن
① $\boxed{\frac{z_D-z_B}{z_C-z_A}=k\in\mathbb{R}^*}$؛ (حيث $A\neq C$ وَ $B\neq D$) تُكافئ: $\boxed{z_D-z_B=k(z_C-z_A)}$؛ معناه: $\boxed{z_{\overrightarrow{BD}}=kz_{\overrightarrow{AC}}}$ أي: $\boxed{\overrightarrow{BD}=k\overrightarrow{AC}}$	① $\boxed{\overrightarrow{BD}//\overrightarrow{AC}}$ أو $\boxed{(BD)//(AC)}$.

❻ تعامد مستقيمين أو شعاعين

إذا كان	نستنتج أن
① $\boxed{\frac{z_D-z_B}{z_C-z_A}=iy;(y\in\mathbb{R}^*)}$؛ (حيث $A\neq C$ وَ $B\neq D$) معناه: $\boldsymbol{arg\left(\frac{z_D-z_B}{z_C-z_A}\right)=arg(iy)=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi}$؛ (حيث $k\in\mathbb{Z}$) أي: $\boldsymbol{(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BD})=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi}$؛ (حيث $k\in\mathbb{Z}$) زاوية قائمة	① $\boxed{\overrightarrow{BD}\perp\overrightarrow{AC}}$ أو $\boxed{(BD)\perp(AC)}$.
② $\boxed{\frac{z_B}{z_A}=iy;(y\in\mathbb{R}^*)}$؛ (حيث $A\neq O$ وَ $B\neq O$) معناه: $\boldsymbol{arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)=arg(iy)=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi}$؛ (حيث $k\in\mathbb{Z}$) أي: $\boldsymbol{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi}$؛ (حيث $k\in\mathbb{Z}$) زاوية قائمة	② $\boxed{\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{OA}}$ أو $\boxed{(OB)\perp(OA)}$.

❼ طبيعة مثلث

بصفة عامة

☜طبيعة المثلث OAB؛ حسب طويلة وَعُمدة $\frac{z_B}{z_A}$، وَطبيعة المثلث ABC؛ حسب طويلة وَعُمدة $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

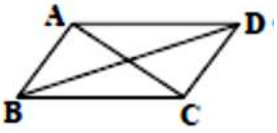
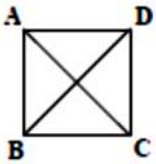
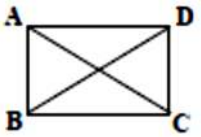
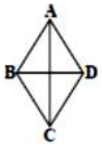
لدينا	معناه (التفسير الهندسي للطويلة والعُمدة)	إذن
① $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\pm i$ $(B\neq A$ وَ $C\neq A)$	① $\begin{cases}\left\lvert\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right\rvert=\frac{AC}{AB}=\lvert\pm i\rvert=1\\ \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\arg(\pm i)\end{cases}$ أي: $\begin{cases}AC=AB\\ (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$ (حيث $k\in\mathbb{Z}$)	① المثلث ABC قائم في A، وَمتساوي الساقين.
② $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=yi\,;y\in\mathbb{R}^*-\{\pm1\}$ $(B\neq A$ وَ $C\neq A)$	② $\begin{cases}\left\lvert\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right\rvert=\frac{AC}{AB}=\lvert yi\rvert\neq1\\ \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\arg(yi)\end{cases}$ أي: $\begin{cases}AC\neq AB\\ (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$ (حيث)	② المثلث ABC قائم في A.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

③ $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$ $(C\neq A$ وَ $B\neq A)$	③ $\begin{cases}\left\|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right\|=\frac{AC}{AB}=\left\|e^{\pm i\frac{\pi}{3}}\right\|=1\\ \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\arg\left(e^{\pm i\frac{\pi}{3}}\right)\end{cases}$ **أي:** $\begin{cases}AC=AB\\ (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$ (حيث $k\in\mathbb{Z}$)	③ المثلث ABC **متقايس الأضلاع**.
④ $\|z_C-z_A\|=\|z_C-z_B\|=\|z_B-z_A\|$	④ $AC=BC=AB$	④ المثلث ABC **متساوي الأضلاع**.
⑤ $\|z_C-z_A\|=\|z_B-z_A\|$ (العلاقة **غير كافية**؛ للحكم على **طبيعة المثلث**)	⑤ $AC=AB$	⑤ **مُرعاة شروط أخرى (العُمدة)**

تذكّر أنه: **كل** عدد مركب **طويلته 1**؛ وَ θ **عُمدة له**، يُكتب من الشكل $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ (**ترميز أولر**).

⑧ طبيعة رباعي بصفة عامة

نُثبت أن ☜ / ☟ لإثبات أن الرباعي	الطريقة الأولى	الطريقة الثانية
① $ABCD$ **متوازي أضلاع**. 	① شعاعان متقابلان في نفس الإتجاه متساويان؛ **نُثبت -مثلاً-** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ **معناه:** $z_{\overrightarrow{AB}}=z_{\overrightarrow{DC}}$ **أي:** $z_B-z_A=z_C-z_D$.	① **القطران متناصفان**. **أي:** $\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{z_B+z_D}{2}$.
② $ABCD$ **مربع**. 	② شعاعان متقابلان في نفس الإتجاه متساويان؛ وَضلعان متتابعان متقايسان ومتعامدان. **نُثبت -مثلاً-** $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\\ AB=AD\\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}\end{cases}$ **أي:** $\begin{cases}z_B-z_A=z_C-z_D\\ \|z_B-z_A\|=\|z_D-z_A\|\\ \arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_D-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$، (حيث $k\in\mathbb{Z}$)	② **القطران متناصفان وَمتقايسان وَمتعامدان**. **أي:** $\begin{cases}\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{z_B+z_D}{2}\\ \|z_C-z_A\|=\|z_D-z_B\|\\ \arg\left(\frac{z_D-z_B}{z_C-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$
③ $ABCD$ **مستطيل**. 	③ شعاعان متقابلان في نفس الإتجاه متساويان؛ وَضلعان متتابعان متعامدان. **نُثبت -مثلاً-** $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}\end{cases}$ **أي:** $\begin{cases}z_B-z_A=z_C-z_D\\ \arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_D-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$، (حيث $k\in\mathbb{Z}$)	③ **القطران متناصفان وَمتقايسان**. **أي:** $\begin{cases}\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{z_B+z_D}{2}\\ \|z_C-z_A\|=\|z_D-z_B\|\end{cases}$
④ $ABCD$ **معين**. 	④ شعاعان متقابلان في نفس الإتجاه متساويان؛ وَضلعان متتابعان متقايسان. **نُثبت -مثلاً-** $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\\ AB=AD\end{cases}$ **أي:** $\begin{cases}z_B-z_A=z_C-z_D\\ \|z_A\|\end{cases}$ قلم الجزائر، (حيث $k\in\mathbb{Z}$)	④ **القطران متناصفان وَمتعامدان؛ أي:** $\begin{cases}\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{z_B+z_D}{2}\\ \arg\left(\frac{z_D-z_B}{z_C-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$

WWW.DZPEN.COM

6 توظيف الأعداد المركبة في التحويلات النقطية:

f تحويل نقطي يُرفق بكل نقطة $M(z)$، النقطة $M'(z')$؛ نكتب: $f: M(z) \to M'(z')$ أو $M' = f(M)$.

التحويل f	إنسحاب	تحاكي	دوران	تشابه مباشر
التعريف $M' = f(M)$	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$\overrightarrow{\Omega M'} = a\overrightarrow{\Omega M}$	$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases}$	$\begin{cases} \Omega M' = k\Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases}$
العبارة المركبة للتحويل f	العبارة ❶ $z' = az + b$			
إذا كان	$a = 1$	$a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$	$\lvert a\rvert = 1$ و $a \in \mathbb{C}^*$	$\lvert a\rvert \neq 1$ و $a \in \mathbb{C}^*$
العناصر المميزة للتحويل f	① شعاعه $\vec{u}$ ذو اللاحقة $z_{\vec{u}} = b$.	① نسبته a، ②ومركزه النقطة الصامدة $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$.	①زاويته $\theta = \arg(a)$، ② ومركزه النقطة الصامدة $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$.	① نسبته $k = \lvert a\rvert > 0$، ② وزاويته $\theta = \arg(a)$، ③ ومركزه النقطة الصامدة $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$.
في حالة $\begin{cases} A' = f(A) \\ B' = f(B) \end{cases}$	تعيين تحويل يُحوّل نقطتين: بالتعويض: $\begin{cases} z_{A'} = az_A + b \quad (1) \\ z_{B'} = az_B + b \quad (2) \end{cases}$؛ وبالطرح: العبارة ❷ $a = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}$، ويكون: العبارة ❸ $z_{B'} - z_{A'} = a(z_B - z_A)$.			
في حالة $\begin{cases} A' = f(A) \\ \Omega = f(\Omega) \end{cases}$	تخص التحويلات ذوات المركز: بالتعويض: $\begin{cases} z_{A'} = az_A + b \quad (1) \\ z_\Omega = az_\Omega + b \quad (2) \end{cases}$؛ وبالطرح: العبارة ❹ $a = \frac{z_{B'} - z_\Omega}{z_B - z_\Omega}$، ويكون: العبارة ❺ $z_{B'} - z_\Omega = a(z_B - z_\Omega)$.			
كتابات أخرى لـ a			$a = e^{i\theta}$ في إحدى العبارات الخمس	$a = ke^{i\theta}$ في إحدى العبارات الخمس
إستعمال العلاقات	تُعرف طبيعة التحويل f، وَعناصره المميزة من العدد a. نقطة صورة أخرى بالتحويل f، عُد إلى العلاقات الخمس وخاصة ❷، ❸، ❹، وَ ❺.			

7 مجموعات النقط:

❶ المرجح ومجموعات النقط

تحويل العبارة الشعاعية (أو العددية)

إذا كان	فإن	ملاحظة
$\alpha + \beta + \gamma \neq 0$	$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}$	حيث G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma)\}$
$\alpha + \beta + \gamma = 0$	$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$ = شعاع ثابت	بإدخال إحدى النقط المعلومة وَاستعمال علاقة ' شال '؛ نحصل على شعاع ثابت (مستقل عن M)
$\alpha + \beta + \gamma \neq 0$	$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = (\alpha + \beta + \gamma)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2$	حيث G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma)\}$

تذكّر أنّ: $\left\|(\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}\right\| = \lvert\alpha + \beta + \gamma\rvert\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = \lvert\alpha + \beta + \gamma\rvert MG$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

❷ تعيين (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ التي تُحقق شرط معين: 🔎

الشرط	مجموعة النقط هي	التعليل
$\|z\| = k$	▪ دائرة مركزها O ونصف قطرها $r = k$، (في حالة $k > 0$) ▪ النقطة O أي: $(\Gamma) = \{O\}$، (في حالة $k = 0$) ▪ مجموعة خالية $\emptyset$ أي: $(\Gamma) = \emptyset$، (في حالة $k = 0$)	$\|z\| = k$ تُكافئ: $OM = k$
$\|z - z_A\| = k$	▪ دائرة مركزها A ونصف قطرها $r = k$، (في حالة $k > 0$) ▪ النقطة A أي: $(\Gamma) = \{A\}$، (في حالة $k = 0$) ▪ مجموعة خالية $\emptyset$ أي: $(\Gamma) = \emptyset$، (في حالة $k = 0$)	$\|z - z_A\| = k$ تُكافئ: $AM = k$
$\|z - z_A\| = \|z - z_B\|$	▪ محور القطعة المستقيمة $[AB]$.	$\|z - z_A\| = \|z - z_B\|$ تُكافئ: $AM = BM$

عبارة من الشكل $z = z_\Omega + ke^{i\theta}$ (حيث $\theta \in \mathbb{R}$ و $k \in \mathbb{R}_+^*$)

الشرط	مجموعة النقط هي	التعليل
θ متغيّر و k ثابت	▪ دائرة مركزها Ω ونصف قطرها $r = k$.	$\|z - z_\Omega\| = \|ke^{i\theta}\|$ تُكافئ: $\Omega M = k$
θ ثابت و k متغيّر	▪ نصف المستقيم $[\Omega B)$ بإستثناء Ω (لأنّ: $k > 0$)، (أي: $(\Gamma) = [\Omega B) - \{\Omega\}$) حيث $B \in (\Gamma)$	$\arg(z - z_\Omega) = \arg(ke^{i\theta})$ تُكافئ: $(\vec{u}; \overrightarrow{\Omega M}) = \theta + 2k\pi$

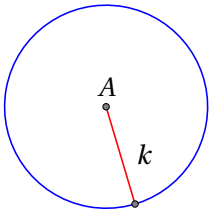
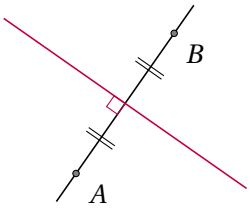
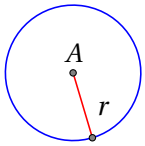
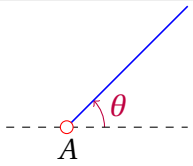
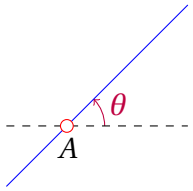
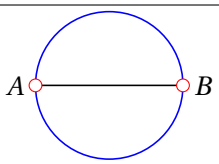
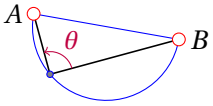
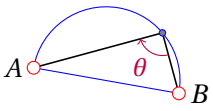
عبارة من الشكل $Z = \frac{z - z_B}{z - z_A}$: (مجموعات نقط تُستخدم فيها العُمدة)

الشرط	مجموعة النقط هي	التعليل
$\frac{z - z_B}{z - z_A}$ تخيلي صرف	▪ الدائرة ذات القطر $[AB]$، بإستثناء A.	$\frac{z - z_B}{z - z_A}$ تخيلي صرف معناه: $\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ أو $\frac{z - z_B}{z - z_A} = 0$ أي: $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ أو $M = B$
$\frac{z - z_B}{z - z_A}$ تخيلي صرف وَجزئه التخيلي موجب	▪ نصف الدائرة الذي يشمل C، وَالذي طرفاه A وَ B؛ بإستثناء A. (حيث: $C \in (\Gamma)$)	$\frac{z - z_B}{z - z_A}$ تخيلي صرف وَجزئه التخيلي موجب معناه: $\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أو $\frac{z - z_B}{z - z_A} = 0$ أي: $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أو $M = B$
$\frac{z - z_B}{z - z_A}$ تخيلي صرف وَجزئه التخيلي سالب	▪ نصف الدائرة الذي يشمل D، وَالذي طرفاه A وَ B؛ بإستثناء A. (حيث: $D \in (\Gamma)$)	$\frac{z - z_B}{z - z_A}$ تخيلي صرف وَجزئه التخيلي سالب معناه: $\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أو $\frac{z - z_B}{z - z_A} = 0$ أي:

		$\boxed{M = B}$ أو $\boxed{(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$
$\frac{z-z_B}{z-z_A}$ حقيقي	▪ **المستقيم** (AB)، **بإستثناء** النقطة A. (أي: $\boxed{(\Gamma) = (AB) - \{A\}}$)	$\frac{z-z_B}{z-z_A} \in \mathbb{R}$ **معناه:** $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = k\pi$ **أي:** $\boxed{(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = k\pi / k \in \mathbb{Z}}$
$\frac{z-z_B}{z-z_A}$ حقيقي موجب تماما	▪ **المستقيم** (AB)، **بإستثناء** القطعة المستقيمة $[AB]$. (أي: $\boxed{(\Gamma) = (AB) - [AB]}$)	$\frac{z-z_B}{z-z_A} \in \mathbb{R}_+^*$ **معناه:** $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = 2k\pi$ **أي:** $\boxed{(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = 2k\pi / k \in \mathbb{Z}}$
$\frac{z-z_B}{z-z_A}$ حقيقي سالب تماما	▪ **القطعة المستقيمة** $[AB]$، **بإستثناء** النقطتين A وَ B. (أي: $\boxed{(\Gamma) = [AB] - \{A; B\}}$)	$\frac{z-z_B}{z-z_A} \in \mathbb{R}_-^*$ **معناه:** $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = \pi + 2k\pi$ **أي:** $\boxed{(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = \pi + 2k\pi}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

مجموعة النقط في الأعداد المركبة

العبارة المركبة	مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z	التمثيل البياني
$\lvert z-z_A\rvert = k$	❀ $k<0$: مجموعة خالية. ❀ $k=0$: مجموعة النقط هي النقطة A . ❀ $k>0$: مجموعة النقط هي دائرة مركزها A ونصف قطرها k.	
$\lvert z-z_A\rvert = \lvert z-z_B\rvert$	مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$	
$z-z_A = re^{i\theta}$ r ثابت موجب تماماً و $\theta \in \mathbb{R}$	مجموعة النقط هي دائرة مركزها A ونصف قطرها r.	
$z-z_A = re^{i\theta}$ $\arg(z-z_A) = \theta + 2k\pi$ θ ثابت و $r \in \mathbb{R}_+^*$	مجموعة النقط هي نصف مستقيم $[AM)$ باستثناء النقطة A حيث $\left(\vec{i};\overrightarrow{AM}\right) = \theta$	
$\arg(z-z_A) = \theta + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$	مجموعة النقط هي المستقيم (AM) باستثناء النقطة A حيث $\left(\vec{i};\overrightarrow{AM}\right) = \theta$	
$\arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $\dfrac{z-z_A}{z-z_B}$ تخيلي صرف , $k \in \mathbb{Z}$	مجموعة النقط هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B .	
$\arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$	نصف دائرة قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B بحيث $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.	
$\arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$	نصف دائرة قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B بحيث $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.	
$\arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right) = k\pi$ $\dfrac{z-z_A}{z-z_B}$ حقيقي , $k \in \mathbb{Z}$	المستقيم (AB) باستثناء النقطة B.	
$\arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \pi + 2k\pi$ $\dfrac{z-z_A}{z-z_B}$ حقيقي سالب تماما , $k \in \mathbb{Z}$	القطعة المستقيمة $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B.	
$\arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right) = 2k\pi$ $\dfrac{z-z_A}{z-z_B}$ حقيقي موجب تماما $k \in \mathbb{Z}$	المستقيم (AB) باستثناء القطعة $[AB]$.	

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM