التمرين:

(I f $\mathbb{R}-\{1\}$ $f(x)=\frac{\alpha x^2+\beta x+1}{1-x}$ β (C_f)

$(O;i,j)$

◆ α β (C_f) 0 $A(2;-3)$

(II $\alpha=1$ $\beta=-1$

❶ $\lim\limits_{x\to 1^<} f(x)$ $\lim\limits_{x\to 1^>} f(x)$

❷ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

❸ $f(x)=ax+b+\frac{c}{1-x}$ c b a

(C_f) (Δ) $\pm\infty$

(C_f) (Δ)

❹ $f'(x)=\frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$ $x\in\mathbb{R}-\{1\}$

f

❺ ω (Δ) $x=1$

ω (C_f)

(C_f) ω

❻ (C_f) (Δ)

❼ $\frac{1}{1-x}=x+m\ldots(E)$ m

$f(x)+x=m\ldots(E')$

(III $h(x)=f(|x|)$ $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ h

❶ h

❷ (C_f) h (C_h)

الخليل للرياضيات
قويسم

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

◄حل مقترح:

(I α β

f 0 $f'(0)=0$

$f'(x)$

$$f'(x)=\frac{(2\alpha x+\beta)(1-x)-(-1)(\alpha x^2+\beta x+1)}{(1-x)^2}$$

$f'(0)=0$

$$\frac{(2\alpha(0)+\beta)(1-0)-(-1)(\alpha(0)^2+\beta(0)+1)}{(1-0)^2}=0\Rightarrow\beta+1=0$$

$$\Rightarrow\boxed{\beta=-1}$$

$f(2)=-3$

$$\frac{\alpha(2)^2+\beta(2)+1}{1-2}=-3\Rightarrow 4\alpha+2\beta+1=3$$

$$\Rightarrow 4\alpha+2\beta=2$$

$$\Rightarrow 4\alpha=4$$

$$\Rightarrow\boxed{\alpha=1}$$

$$\boxed{f(x)=\frac{x^2-x+1}{1-x}}$$

(II $\alpha=1$ $\beta=-1$

❶ $\lim\limits_{\substack{<\\x\to1}} f(x)$ $\lim\limits_{\substack{>\\x\to1}} f(x)$

- $\lim\limits_{\substack{>\\x\to1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{>\\x\to1}}\left(\frac{x^2-x+1}{1-x}\right)=\frac{1}{0^-}=-\infty$

$x=1$ $-\infty$ (C_f)

- $\lim\limits_{\substack{<\\x\to1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{<\\x\to1}}\left(\frac{x^2-x+1}{1-x}\right)=\frac{1}{0^+}=+\infty$

$x=1$ $+\infty$ (C_f)

❷ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{1-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)$

$=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{1-x}\right)=+\infty$

❸ $f(x)=ax+b+\frac{c}{1-x}$ c b a

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{1-x}$$

$$=\frac{(ax+b)(1-x)+c}{1-x}$$

$$=\frac{ax-ax^2+b-bx+c}{1-x}$$

$$=\frac{-ax^2+(a-b)+b+c}{1-x}$$

الخليل للرياضيات

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$f(x)=-x+\dfrac{1}{1-x}$ $\begin{cases} a=-1 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases}$ $\begin{cases} -a=1 \\ a-b=-1 \\ b+c=1 \end{cases}$

$\pm\infty$ (Δ) (C_f)

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(-x)]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[-x+\frac{1}{1-x}-(-x)\right]$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{1-x}\right]$$
$$=0$$

$y_{(\Delta)}=-x$ $\pm\infty$ (Δ) (C_f)

(Δ) (C_f)

$$f(x)-y_{(\Delta)}=\frac{1}{1-x}$$

$x=1$ $1-x=0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)-y_{(\Delta)}$	$+$		$-$		
	(Δ)	(C_f)	(Δ)	(C_f)	

❹ $f'(x)=\frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$ $x\in\mathbb{R}-\{1\}$

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(1-x)-(-1)(x^2-x+1)}{(1-x)^2}$$
$$=\frac{2x-2x^2-1+x+x^2-x+1}{(1-x)^2}$$
$$=\frac{-x^2+2x}{(1-x)^2}$$
$$=\frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$$

f

$x(2-x)$ $f'(x)$ $(1-x)^2>0$

$$x(2-x)=0\Rightarrow\begin{cases} x=0 \\ 2-x=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

f -

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		0	$+$	$+$		0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$

❺ $x=1$ (Δ) ω

$y=-1$ (Δ) $x=1$

$\omega(1;-1)$

(C_f) ω

$x\in D_f$

الخليل للرياضيات

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$x \in]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

$(-x) > -1 \quad (-x) < -1$

$(2(1)-x) \in]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

$x < 1 \quad x > 1$

$(2(1)-x) > 1 \quad (2(1)-x) < 1$

$(2(1)-x) \in D_f$

مركز التناظر:

نقول أن النقطة $\Omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر (C_f) إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} (\alpha + x) \in D_f \\ (\alpha - x) \in D_f \\ f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(2(1)-x)+f(x) &= -(2-x)+\frac{1}{1-(2-x)}-x+\frac{1}{1-x} \\ &= -2+x+\frac{1}{-1+x}-x+\frac{1}{1-x} \\ &= -2-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-x} \\ &= -2 = 2(-1) \end{aligned}$$

(C_f) ω

ω (C_f)

$a \in \mathbb{R}-\{1\}$ $\omega(1;-1)$ (C_f)

$f'(a)(x_\omega - a) + f(a) = y_\omega$

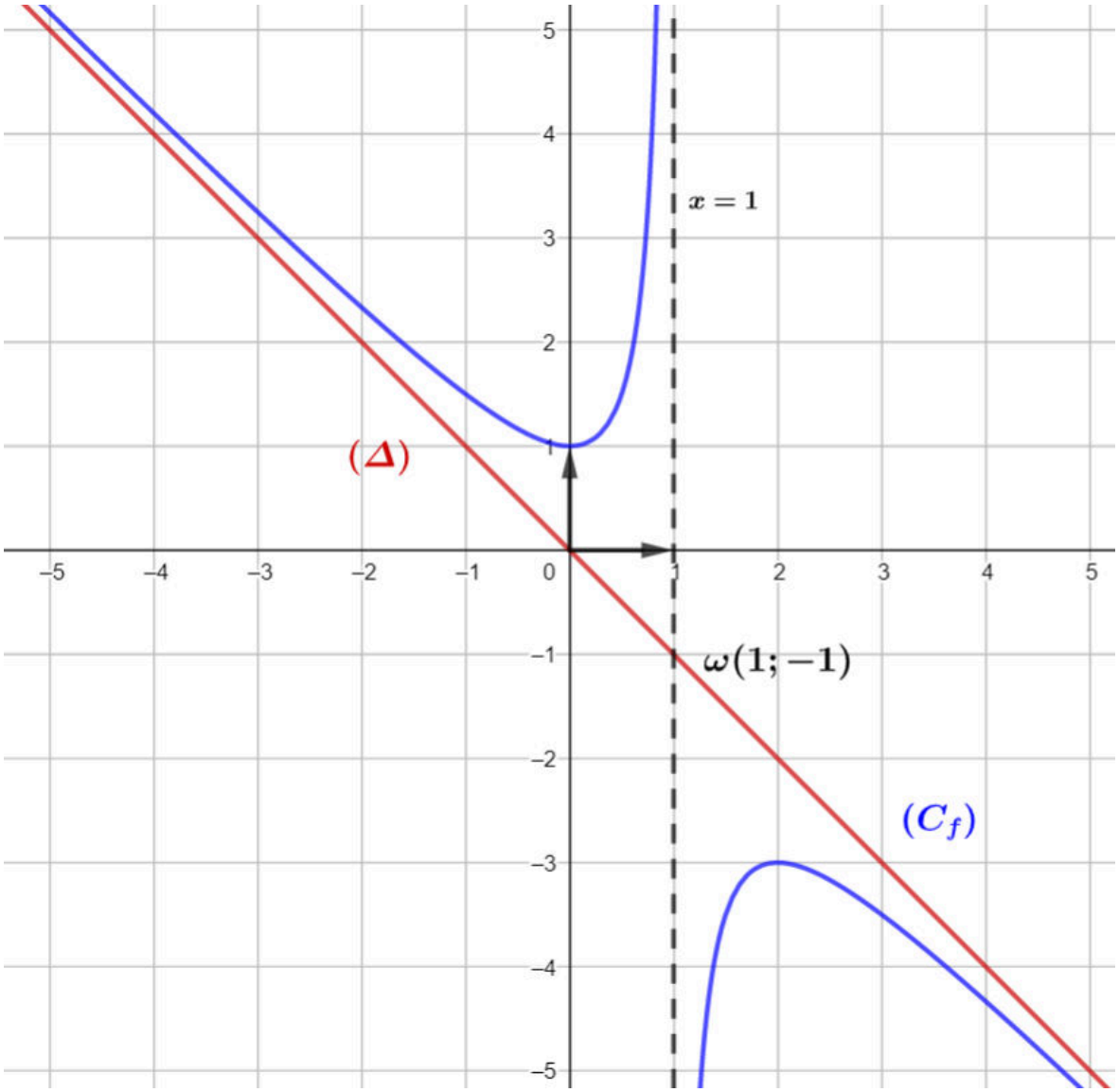
$$\begin{aligned} f'(a)(x_\omega - a) + f(a) = y_\omega &\Rightarrow f'(a)(1-a)+f(a) = -1 \\ &\Rightarrow \frac{a(2-a)}{(1-a)^2}(1-a)+\frac{a^2-a+1}{1-a} = -1 \\ &\Rightarrow \frac{a(2-a)}{(1-a)^2}-\frac{a^2(2-a)}{(1-a)^2}+\frac{a^2-a+1}{1-a} = -1 \\ &\Rightarrow \frac{a(2-a)}{(1-a)^2}-\frac{a^2(2-a)}{(1-a)^2}+\frac{(a^2-a+1)(1-a)}{(1-a)^2} = -1 \\ &\Rightarrow \frac{2a-a^2-2a^2+a^3+a^2-a^3-a+a^2+1-a}{(1-a)^2} = -1 \\ &\Rightarrow \frac{-a^2+1}{(1-a)^2} = -1 \\ &\Rightarrow \frac{(1-a)(1+a)}{(1-a)^2} = -1 \\ &\Rightarrow \frac{1+a}{1-a} = -1 \\ &\Rightarrow 1+a = -1+a \\ &\Rightarrow 1 = -1 \end{aligned}$$

ω (C_f) $1 \neq -1$

❻ (C_f) (Δ)

الخليل للرياضيات

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM



❼

(E)

$$\frac{1}{1-x} = x + m \Rightarrow \frac{1}{1-x} - x = m$$
$$\Rightarrow f(x) = m$$

$y_m = x$ (C_f) (E)

$m \in]-\infty;-3[$
$m = -3$
$m \in\ ]-3;1[$
$m = 1$
$m \in\ ]1;+\infty[$

(E')

$$f(x) + x = m \Rightarrow f(x) = -x + m$$

$y_m = -x + m$ (C_f) (E')

$m \in]-\infty;-1[$
$m = -1$
$m \in\ ]-1;0[$

الخليل للرياضيات

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$m = 0$
$m \in \ ]0;1[$
$m = 1$
$m \in \ ]1;+\infty[$

(III

❶ h

$$h(-x) = f(|-x|)$$
$$= f(|x|)$$
$$= h(x)$$

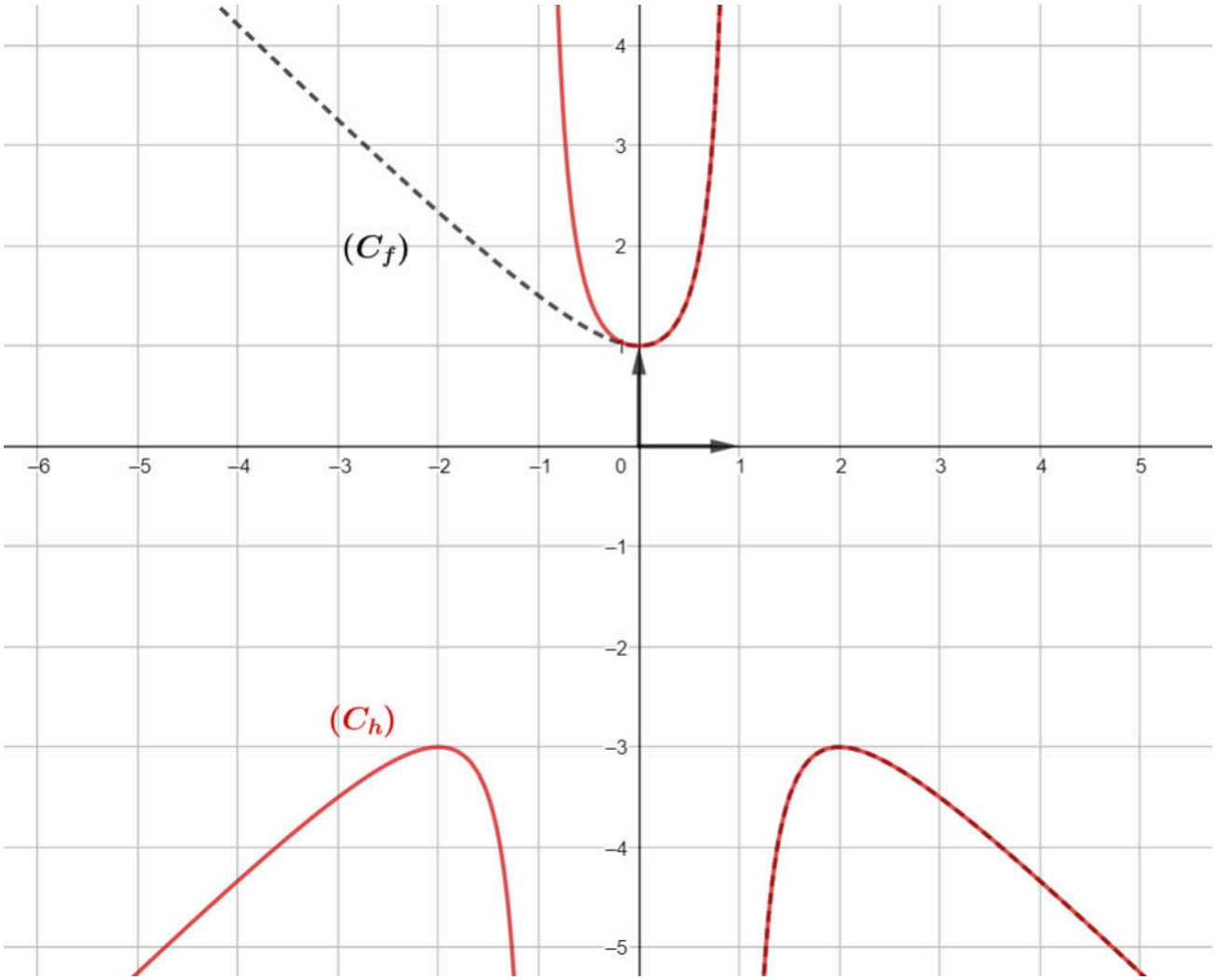
h

❷ (C_h)

$$h(x) = f(|x|)$$
$$= \begin{cases} f(x) & ; \quad x \in [0;1[\cup]1;+\infty[\\ f(-x) & ; \quad x \in]-\infty;-1[\cup]-1;0] \end{cases}$$

$x \geq 0$ (C_f) (C_h)

h



◄ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ►

الخليل للرياضيات

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM