ملخصات مفيدة قبل البكالوريا

الشعب : علوم تجريبية - رياضيات - تقني رياضي

المراجعة النهائية

★ قواعد الحساب ★

① الجداءات الشهيرة

الجداءات الشهيرة من الدرجة الثانية	الجداءات الشهيرة من الدرجة الثالثة
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

② حل المعادلات من الدرجة الثانية

	حساب المميز $\Delta = b^2 - 4ac$		
	إذا كان : $\Delta > 0$	إذا كان : $\Delta = 0$	إذا كان : $\Delta < 0$
حلول المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ $a \neq 0$	المعادلة تقبل حلين متمايزين هما : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	المعادلة تقبل حل مضاعف هو : $x_0 = \frac{-b}{2a}$	المعادلة لا تقبل حلول
تحليل $ax^2 + bx + c$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$	لا يمكن تحليل $ax^2 + bx + c$
إشارة $ax^2 + bx + c$	$-\infty$ إشارة a ، x_1 إشارة $(-a)$ ، x_2 إشارة a ، $+\infty$	$-\infty$ إشارة a ، x_0 إشارة a ، $+\infty$	$-\infty$ إشارة a ، $+\infty$

③ خواص القيمة المطلقة

إذا كان x وَ y عددان حقيقيان فإن :

$\lvert x \rvert \geq 0$	$\lvert -x \rvert = \lvert x \rvert$	$\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$
$\lvert x \times y \rvert = \lvert x \rvert \times \lvert y \rvert$	$\left\lvert \frac{x}{y} \right\rvert = \frac{\lvert x \rvert}{\lvert y \rvert}$ مع $y \neq 0$	$\lvert x + y \rvert \leq \lvert x \rvert + \lvert y \rvert$
$\lvert x \rvert = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x \leq 0 \end{cases}$	$\lvert x + a \rvert = \begin{cases} x + a & ; x \geq -a \\ -x - a & ; x \leq -a \end{cases}$	$\lvert x - a \rvert = \begin{cases} x - a & ; x \geq a \\ -x + a & ; x \leq a \end{cases}$
إذا كان $a \leq \lvert x \rvert$ فإن $-a \leq x \leq a$	إذا كان $a \geq \lvert x \rvert$ فإن $x \geq a$ أو $x \leq -a$	

WWW.DZPEN.COM
استعد للبكالوريا مع توامي Maths

④ قواعد الحصر

لتكن a ، b ، c ، d أعداد حقيقية موجبة تماماً .

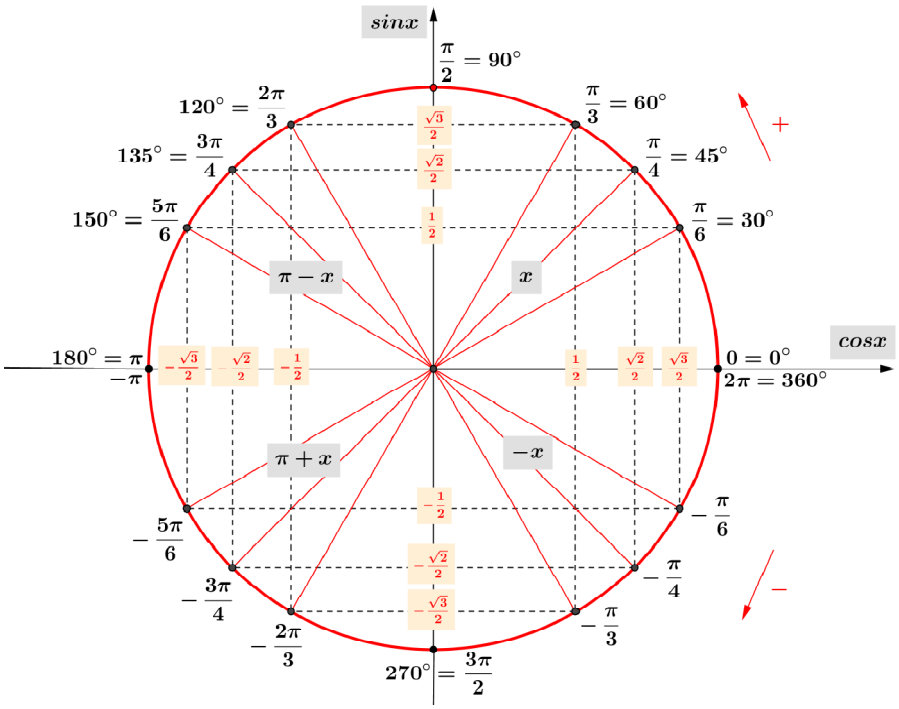
	خاصية الـ			
	جمع	طرح	ضرب	قسمة
$a \le x \le b$ $c \le y \le d$	$a+c \le x+y \le b+d$	$a-d \le x-y \le b-c$	$a \times c \le x \times y \le b \times d$	$\frac{a}{d} \le \frac{x}{y} \le \frac{b}{c}$

⑤ الدائرة المثلثية وَ حساب المثلثات

x عدد حقيقي :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1

$\begin{cases}\cos(x \pm 2k\pi) = \cos x \\ \sin(x \pm 2k\pi) = \sin x\end{cases}$	$\cos^2 x + \sin^2 = 1$ $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\begin{cases}-1 \le \cos x \le 1 \\ -1 \le \sin x \le 1\end{cases}$ $\begin{cases}\cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x\end{cases}$



WWW.DZPEN.COM
استعد للبكالوريا مع توامي Maths

★ النهايات ★

① نهايات بعض الدوال المرجعية

الدالة مقلوب	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0^-$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0^+$	$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\frac{1}{x}=-\infty$	$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{x}=+\infty$
الدالة جذر	$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0^+$	$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}a}\frac{1}{\sqrt{x-a}}=+\infty$	$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}a}\frac{1}{\sqrt{a-x}}=+\infty$
الدالة x^n $n\in\mathbb{N}^*$	$\lim\limits_{x\to+\infty}x^n=+\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty}x^n=+\infty$ مع n زوجي	$\lim\limits_{x\to-\infty}x^n=-\infty$ مع n فردي	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n}=0$

② حالات عدم التعيين وطرق إزالتها

حالات عدم التعيين	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0\times\infty$	$+\infty-\infty$
حالات يمكن التعيين	$\frac{\ell}{0}=\infty$	$\frac{\infty}{0}=\infty$	$\frac{\ell}{\infty}=0$	$\frac{0}{\infty}=0$
طرق الإزالة	⊂ بالنسبة لدوال كثيرات الحدود عندما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ نأخذ نهاية الحد الأعلى (الأكبر) درجة ⊂ بالنسبة لدوال ناطقة عندما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ نأخذ نهاية الحد الأعلى درجة في البسط وَ المقام ⊂ بالنسبة لدوال جذرية عندما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ أو x_0 في معظم الحالات نضرب وَ نقسم في المرافق ⊂ عندما x يؤول إلى x_0 نستعمل الجداءات الشهيرة أو التحليل أو العامل المشترك			

③ مبرهنات في النهايات

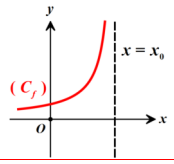
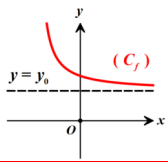
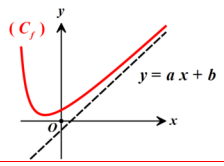
مبرهنة التركيب	نعتبر u ، v وَ f ثلاث دوال حيث $f=v\circ u$ ، وَ لتكن a ، b وَ c أعداد حقيقية إما منتهية أو $+\infty$ أو $-\infty$ إذا كانت $\lim\limits_{x\to a}u(x)=b$ وَ $\lim\limits_{x\to b}v(x)=c$ فإن : $\lim\limits_{x\to a}f(x)=c$
مبرهنة الحصر	إذا كان : $g(x)\le f(x)\le h(x)$ حيث : $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\ell$ وَ $\lim\limits_{x\to a}h(x)=\ell$ فإن : $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\ell$
مبرهنات المقارنة	⊂ إذا كان : $f(x)\ge g(x)$ حيث : $\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ ⊂ إذا كان : $f(x)\le g(x)$ حيث : $\lim\limits_{x\to a}g(x)=-\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$ ⊂ إذا كان : $\lvert f(x)-\ell\rvert\le g(x)$ حيث : $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ فإن : $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\ell$

④ نهايات الدوال المثلثية

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=0$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

★ المستقيمات المقاربة ★

لتكن f دالة عددية و (C_f) التمثيل البياني لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

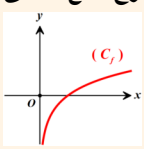
النهاية	التفسير الهندسي	التمثيل البياني
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$	(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=x_0$	
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=y_0$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=y_0$	(C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=y_0$ بجوار $+\infty$ أو $-\infty$	
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$	(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=ax+b$ بجوار $+\infty$ أو $-\infty$	

إذا كانت : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\pm\infty$

نقول احتمال وجود مستقيم مقارب مائل معادلته $y=ax+b$ ، ثم نحسب $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

(C_f) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه $(x'x)$

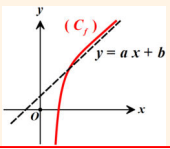


$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a \quad (a\neq 0)$

ثم نحسب $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]$

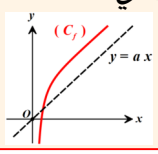
$\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]=b$

(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=ax+b$ بجوار ∞



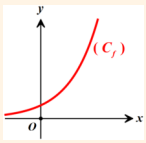
$\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]=\infty$

(C_f) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه المستقيم الذي معادلته $y=ax$



$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$

(C_f) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه $(y'y)$



WWW.DZPEN.COM

★ الاستمرارية وَ مبرهنة القيم المتوسطة ★

لتكن f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ يشمل العدد الحقيقي a .

① الاستمرارية

استمرارية الدالة f عند a	$\ell \in \mathbb{R}$ حيث $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) = \ell$	إذا كان $\ell_1 = \ell_2$ فإن f مستمرة عند a
استمرارية الدالة f على يمين a	$\ell_1 \in \mathbb{R}$ حيث $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} f(x) = f(a) = \ell_1$	
استمرارية الدالة f على يسار a	$\ell_2 \in \mathbb{R}$ حيث $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} a} f(x) = f(a) = \ell_2$	

② صورة مجال بواسطة دالة مستمرة

المجال I	f دالة متزايدة تماماً على I	f دالة متناقصة تماماً على I
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$[a;b[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x \xrightarrow{<} b} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x \xrightarrow{<} b} f(x);f(a)\right]$
$]a;b]$	$\left]\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} f(x);f(b)\right]$	$\left[f(b);\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} f(x)\right[$
$]a;b[$	$\left]\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} f(x);\lim\limits_{x \xrightarrow{<} b} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x \xrightarrow{<} b} f(x);\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} f(x)\right[$

③ مبرهنة القيم المتوسطة

مبرهنة ❶	إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ وَ كان العدد الحقيقي k محصور بين $f(a)$ وَ $f(b)$ فإن المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلاً على الأقل في المجال $]a;b[$
مبرهنة ❷	إذا كانت f دالة مستمرة وَ رتيبة تماماً على المجال $[a;b]$ وَ كان العدد الحقيقي k محصور بين $f(a)$ وَ $f(b)$ فإن المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $]a;b[$
مبرهنة ❸	إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ وَ كان $f(a)\times f(b)<0$ فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي α محصور بين a وَ b بحيث $f(\alpha)=0$.
مبرهنة ❹	إذا كانت f دالة مستمرة وَ رتيبة تماماً على المجال $[a;b]$ وَ كان $f(a)\times f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $]a;b[$

WWW.DZPEN.COM

★ الاشتقاقية ★

لتكن f دالة معرفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$ وَ a عدد من D_f .

① الاشتقاقية

قابلية اشتقاق الدالة f عند a	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$	إذا كان $f'_d(a)=f'_g(a)$ فإن f قابلة للاشتقاق عند a
قابلية اشتقاق الدالة f على يمين a	$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_d(a)$	
قابلية اشتقاق الدالة f على يسار a	$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_g(a)$	

② مشتقات الدوال المألوفة

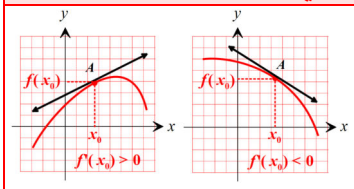
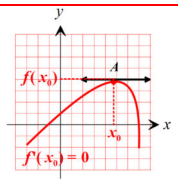
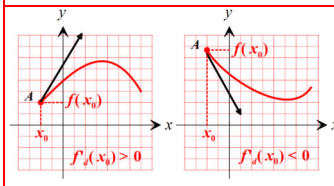
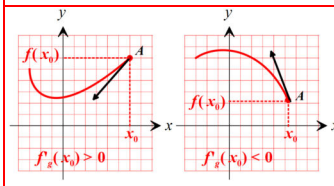
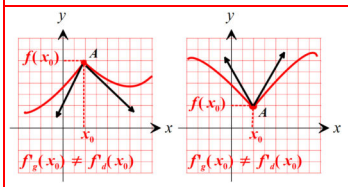
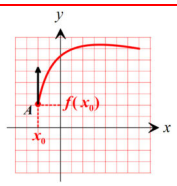
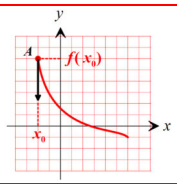
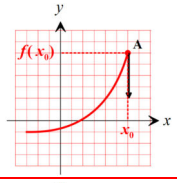
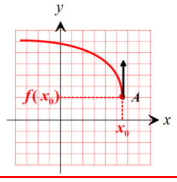
$f(x)$	$f'(x)$	مجال قابلية الاشتقاق
a حيث $a\in\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
ax	a	$\mathbb{R}$
x^n حيث $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$	$n.x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{x^n}$ حيث $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$	$\dfrac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$

③ المشتقات وَ العمليات على الدوال

الدالة	$u\pm v$	au	$u\times v$	$\dfrac{1}{v}$	$\dfrac{u}{v}$	$\sqrt{u}$	u^n	$u\circ v$
الدالة المشتقة	$u'\pm v'$	au'	$u'v-v'u$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	$\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$n\times u^{n-1}\times u'$ $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$	$v'.u'(v)$

WWW.DZPEN.COM
استعد للبكالوريا مع توامي Maths

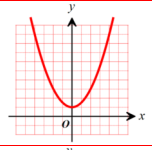
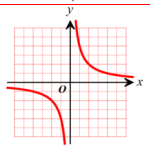
④ التفسيرات الهندسية للاشتقاقية

النهاية	الاستنتاج	التفسير الهندسي
$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a$	f تقبل الاشتقاق عند x_0 و $f'(x_0)=a$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ مماساً معادلته: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ 
$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$	f تقبل الاشتقاق عند x_0 و $f'(x_0)=0$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ مماساً موازي لمحور الفواصل معادلته: $y=f(x_0)$ 
$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a$	f تقبل الاشتقاق على يمين x_0 و $f'_d(x_0)=a$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس معادلته: $y=f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ 
$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=b$	f تقبل الاشتقاق على يسار x_0 و $f'_g(x_0)=b$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس معادلته: $y=f'_g(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ 
$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\neq\lim\limits_{x\xrightarrow{>}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	f لا تقبل الاشتقاق عند x_0 و $f'_g(x_0)\neq f'_d(x_0)$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصفي مماسين حيث A تسمى نقطة زاوية. 
$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0	(C_f) يقبل على يمين النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى معادلته $x=x_0$. 
$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0	(C_f) يقبل على يمين النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل معادلته $x=x_0$. 
$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0	(C_f) يقبل على يسار النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل معادلته $x=x_0$. 
$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0	(C_f) يقبل على يسار النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى معادلته $x=x_0$. 

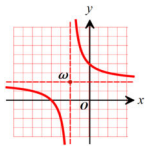
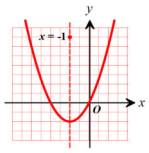
WWW.DZPEN.COM

★ شفعية دالة - مركز تناظر وَ محور تناظر ★

① شفعية دالة

	التعريف	التفسير الهندسي	التمثيل البياني
الدالة الزوجية	f دالة زوجية يعني من أجل كل : $x \in D_f$ وَ $-x \in D_f$ فإن : $f(-x) = f(x)$	(C_f) يقبل محور التراتيب كمحور تناظر	
الدالة الفردية	f دالة فردية يعني من أجل كل : $x \in D_f$ وَ $-x \in D_f$ فإن : $f(-x) = -f(x)$	(C_f) يقبل مبدأ المعلم O كمركز تناظر	

② مركز تناظر وَ محور تناظر دالة

	التعريف	التمثيل البياني
مركز تناظر	$\omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر لـ (C_f) يعني من أجل كل $x \in D_f$ وَ $(2\alpha - x) \in D_f$ فإن : $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$	
محور تناظر	$x = \alpha$ محور تناظر لـ (C_f) يعني من أجل كل $x \in D_f$ وَ $(2\alpha - x) \in D_f$ فإن : $f(2\alpha - x) = f(x)$	

★ الوضع النسبي بين منحنى و مستقيم ★

(C_f) التمثيل البياني للدالة f وَ (Δ) مستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$.

إشارة الفرق $f(x) - y$	الوضعية النسبية
$f(x) - y > 0$	(C_f) يقع فوق (Δ)
$f(x) - y < 0$	(C_f) يقع تحت (Δ)
$f(x) - y = 0$	(C_f) وَ (Δ) يتقاطعان

WWW.DZPEN.COM

★ إنشاء منحنى باستعمال منحنى آخر معلوم ★

ليكن (C_f) وَ (C_g) منحنيين للدالتين f وَ g على الترتيب في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

الدالة	التمثيل البياني
$f(x)=g(x)+b$	(C_f) هو صورة (C_g) بالانسحاب الذي شعاعه $b\,\vec{j}$
$f(x)=g(x+a)$	(C_f) هو صورة (C_g) بالانسحاب الذي شعاعه $-a\,\vec{i}$
$f(x)=g(x+a)+b$	(C_f) هو صورة (C_g) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(-a;b)$
$f(x)=-g(x)$	المنحنيين (C_f) وَ (C_g) متناظران بالنسبة لمحور الفواصل
$f(x)=g(-x)$	المنحنيين (C_f) وَ (C_g) متناظران بالنسبة لمحور التراتيب
$f(x)=-g(-x)$	المنحنيين (C_f) وَ (C_g) متناظران بالنسبة إلى مبدأ المعلم
$f(x)=g(\lvert x\rvert)$	▪ إذا كان $x\geq 0$ فإن $f(x)=g(x)$ منه (C_f) ينطبق على (C_g) ▪ إذا كان $x\leq 0$ فإن $f(x)=g(-x)$ منه (C_f) هو نظير (C_g) المرسوم في المجال الموجب بالنسبة لمحور التراتيب (f دالة زوجية)
$f(x)=\lvert g(x)\rvert$	▪ إذا كان $g(x)\geq 0$ فإن $f(x)=g(x)$ منه (C_f) ينطبق على (C_g) ▪ إذا كان $g(x)\leq 0$ فإن $f(x)=-g(x)$ منه (C_f) نظير (C_g) بالنسبة لمحور الفواصل

★ المناقشة البيانية ★

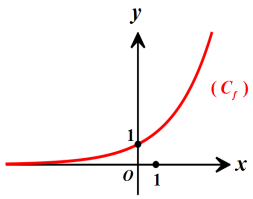
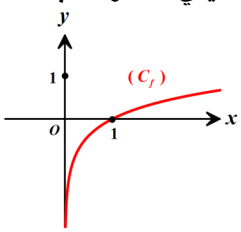
ليكن (C_f) منى الدالة f وَ (Δ) مستقيم مائل (مماس أو مستقيم مقارب) معادلته $y=ax+b$.

المعادلة من الشكل	المناقشة البيانية ($m\in\mathbb{R}$)
$f(x)=m$	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الموازية لمحور الفواصل
$f(x)=ax+m$	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الموازية لـ (Δ)
$f(x)=mx+b$	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الدورانية حول النقطة $(0;b)$
$f(x)=m^2$ أو $f(x)=\lvert m\rvert$	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الموازية لمحور الفواصل ($y=m^2$ أو $y=\lvert m\rvert$) لكن المناقشة تبدأ من محور الفواصل نحو الأعلى
$f(x)=f(m)$	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الموازية لمحور الفواصل معادلتها $y=f(m)$

ملاحظات :
- نقول أن للمعادلة حل موجب إذا كانت نقطة التقاطع تقع على يمين محور التراتيب .
- نقول أن للمعادلة حل سالب إذا كانت نقطة التقاطع تقع على يسار محور التراتيب .
- نقول أن للمعادلة حل مضاعف إذا كانت نقطة التقاطع هي نقطة المماس .

WWW.DZPEN.COM

★ الدالة الأسية وَ الدالة اللوغاريتمية ★

الدالة الأسية	الدال اللوغاريتمية
1- تعريف : الدالة الأسيّة f هي الدالة الوحيدة ، قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وَ تحقق : $f'=f$ وَ $f(0)=1$ و نكتب : $f(x)=\exp(x)$ أو $f(x)=e^x$ 	**1- تعريف :** نسمي " الدالة اللوغارتمية النبيرية " الدالة التي نرمز لها بـ " $\ln$ " و التي ترفق بكل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ العدد الحقيقي $\ln x$ وَ نكتب : $f(x)=\ln x$ 
2- خواص الدالة الأسية : ليكن x ، y من $\mathbb{R}$ و n عدد صحيح نسبي : $e^0=1$ وَ $e^1=e\approx 2{,}71$ $e^{x+y}=e^x.e^y$ ، $e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y}$ $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$ ، $e^{nx}=(e^x)^n$ إذا كان : $e^x=e^y$ فإن : $x=y$ إذا كان : $e^x>e^y$ فإن : $x>y$	**2- خواص الدالة اللوغاريتمية النبيرية :** ليكن x وَ y من $]0;+\infty[$ و n عدد صحيح نسبي : $\ln 1=0$ ، $\ln e=1$ $\ln(x.y)=\ln x+\ln y$ ، $\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln x-\ln y$ $\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln x$ ، $\ln x^n=n\ln x$ إذا كان : $\ln x=\ln y$ فإن : $x=y$ إذا كان : $\ln x\succ\ln y$ فإن : $x>y$ $\ln x>0$ يعني $x>1$ و $\ln x<0$ يعني $0<x<1$
3- مجموعة تعريف الدّالة الأسية : $f(x)=e^{u(x)}$ ، الدالة f معرفة إذا كانت u معرفة	**3- مجموعة تعريف الدّالة اللوغاريتمية :** $f(x)=\ln u(x)$ ، الدالة f معرفة إذا كانت : $u(x)>0$
4- مشتقة الدّالة الأسية : $f(x)=e^{u(x)}$ منه : $f'(x)=u'(x)\times e^{u(x)}$	**4- مشتقة الدّالة اللوغاريتمية :** $f(x)=\ln u(x)$ منه : $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$ مع $u(x)>0$ $f(x)=\ln\lvert u(x)\rvert$ منه: $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$ مع $u(x)\neq 0$
5- النهايات الشهيرة : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0^+$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0^-$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$ مع $n>0$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}x^ne^x=0$	**5- النهايات الشهيرة :** $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0^-$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ، $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$ ، $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$ ، $\lim\limits_{x\to0^+}x^n\ln x=0^-$ مع $n>0$.
$\ln e^x=x$ مع $x\in\mathbb{R}$ ، $e^{\ln x}=x$ مع $x\in\mathbb{R}_+^*$	

WWW.DZPEN.COM
استعد للبكالوريا مع توامي Maths

★ الهندسة الفضائية ★

نعتبر في كل ما يلي $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم متعامد و متجانس للفضاء ، نضع : $A(x_A;y_A;z_A)$ ، $B(x_B;y_B;z_B)$ ، $C(x_C;y_C;z_C)$

مركبات شعاع	مركبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي : $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$
طويلة شعاع	طويلة الشعاع $\vec{u}(x;y;z)$ هي $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
المسافة بين نقطتين	$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$
منتصف قطعة مستقيمة	I منتصف القطعة $[AB]$ حيث : $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$
الجداء السلمي بين شعاعين	$\vec{u}\bullet\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})$
العبارة التحليلية للجداء السلمي	$\vec{u}(x;y;z)$ وَ $\vec{v}(x';y';z')$ حيث $\vec{u}\bullet\vec{v}=x.x'+y.y'+z.z'$
تعامد شعاعين	$\vec{u}$ وَ $\vec{v}$ متعامدان إذا كان : $\vec{u}\bullet\vec{v}=0$
الارتباط الخطي بين شعاعين	$\vec{u}$ وَ $\vec{v}$ متوازيان إذا كان : $\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}=k$ معناه : $\vec{u}=k\vec{v}$ مع $k\in\mathbb{R}$
المعادلة الديكارتية للمستوي (P)	$a\,x+b\,y+c\,z+d=0$ ، حيث $\vec{n}(a;b;c)$ شعاعه الناظم
توازي مستويين (P) وَ (P')	$\vec{n}=k\times\vec{n'}$ حيث $\vec{n}$ ناظمي لـ (P) وَ $\vec{n'}$ ناظمي لـ (P') وَ $k\in\mathbb{R}$
تعامد مستويين (P) وَ (P')	$\vec{n}\bullet\vec{n'}=0$ حيث $\vec{n}$ ناظمي لـ (P) وَ $\vec{n'}$ ناظمي لـ (P')
بعد النقطة A عن المستوي (P)	$d(A;(P))=\frac{\|a\,x_A+b\,y_A+c\,z_A+d\|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
المعادلة الديكارتية لسطح كرة (S)	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$ حيث $\omega(x_0;y_0;z_0)$ مركزها وَ r نصف قطرها
مرجح نقطتين	G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$ مع $\alpha+\beta\neq0$ معناه : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$
مرجح ثلاث نقط	G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\delta)\}$ مع $\alpha+\beta+\delta\neq0$ معناه : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\delta\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
مركز ثقل المثلث ABC	G مركز ثقل المثلث ABC معناه G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\alpha),(C;\alpha)\}$
إحداثيات مرجح نقطتين	$G\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta};\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta};\frac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}\right)$
إحداثيات مرجح ثلاث نقط	$G\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\delta x_C}{\alpha+\beta+\delta};\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\delta y_C}{\alpha+\beta+\delta};\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\delta z_C}{\alpha+\beta+\delta}\right)$
مساحة مثلث	$S=\frac{1}{2}\times$ مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع
حجم رباعي الوجوه	$V=\frac{1}{3}\times S\times h$ حيث S مساحة القاعدة (مثلث) وَ h الإرتفاع

WWW.DZPEN.COM

التمثيل الوسيطي للمستقيم (d)	$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$ ، $t \in \mathbb{R}$ حيث $A(x_A; y_A; z_A)$ منه وَ $\vec{u}(a;b;c)$ شعاع توجيه له
التمثيل الديكارتي للمستقيم (d)	$\dfrac{x - x_A}{a} = \dfrac{y - y_A}{b} = \dfrac{z - z_A}{c}$
التمثيل الوسيطي للمستوي (P)	$\begin{cases} x = x_A + at + a's \\ y = y_A + bt + b's \\ z = z_A + ct + +c's \end{cases}$ ، $t, s \in \mathbb{R}$ حيث $A(x_A; y_A; z_A)$ منه $\vec{u}(a;b;c)$ وَ $\vec{v}(a';b';c')$ شعاعي توجيه له
مجموعة النقط M في الفضاء	⊂ $\overrightarrow{AM} \bullet \vec{n} = 0$ مجموعة النقط M هو المستوي الذي يشمل A وَ $\vec{n}$ ناظمي له ⊂ $AM = BM$ مجموعة النقط M هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ ⊂ $AM = AB$ مجموعة النقط M هو سطح كرة مركزها A وَ نصف قطرها AB ⊂ $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{BM} = 0$ مجموعة النقط M هو سطح كرة التي قطرها $[AB]$ ⊂ $\overrightarrow{AM} \bullet \vec{n} > 0$ أو $\overrightarrow{AM} \bullet \vec{n} < 0$ هو نصف فضاء مفتوح حده المستوي الذي يشمل A وَ $\vec{n}$ ناظمي له ⊂ $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{AB} = k$ مع $k \in \mathbb{R}^*$ هو المستوي العمودي على (AB) وَ الذي يشمل النقطة H حيث H المسقط العمودي لـ M على (AB)

✶ الاستدلال بالتراجع ✶

مبرهنة

$P(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n وَ n_0 عدد طبيعي .

للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، يكفي :

❶ نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$.

❷ نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أكبر من أو يساوي n_0 أي $P(n)$ (فرضية التراجع)
و نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$.

ملاحظات

⊂ إذا كان $n \in \mathbb{N}$ فإن : $n_0 = 0$ ، وَ إذا كان $n \in \mathbb{N}^*$ فإن : $n_0 = 1$ ، وهكذا ...

⊂ يمكن التفكير في استعمال الاستدلال بالتراجع للبرهان على صحة خاصية متعلقة بالأعداد الطبيعية .

★ المتتاليات العددية ★

المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
1- تعريف : (u_n) متتالية حسابية معناه : $u_{n+1} = u_n + r$	1- تعريف : (u_n) متتالية هندسية معناه : $u_{n+1} = u_n \times q$
2- الحد العام لمتتالية حسابية بدلالة الحد الأول :	2- الحد العام لمتتالية هندسية بدلالة الحد الأول :
إذا كان u_0 هو الحد الأول فإن : $u_n = u_0 + nr$	إذا كان u_0 هو الحد الأول فإن : $u_n = u_0 \times q^n$
إذا كان u_1 هو الحد الأول فإن : $u_n = u_1 + (n-1)r$	إذا كان u_1 هو الحد الأول فإن : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$
بصفة عامة : $u_n = u_p + (n-p)r$ حيث $p \in \mathbb{N}$	بصفة عامة : $u_n = u_p \times q^{n-p}$ حيث $p \in \mathbb{N}$
3- الوسط الحسابي :	3- الوسط الهندسي :
إذا كانت a ، b ، c أعداد حقيقية مأخوذة بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية فإن : $a + c = 2b$	إذا كانت a ، b ، c أعداد حقيقية مأخوذة بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية فإن : $a \times c = b^2$
4- المجموع : $S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير})$	4- المجموع : $S_n = \text{الحد الأول} \times \left(\frac{q^{\text{عدد الحدود}} - 1}{q - 1} \right)$
5- تقارب و تباعد متتالية حسابية :	5- تقارب و تباعد متتالية هندسية :
إذا كان $r > 0$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$	إذا كان $q > 1$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty$ المتتالية (u_n) متباعدة
إذا كان $r < 0$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$	إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ المتتالية (u_n) متقاربة
إذن المتتالية الحسابية دوماً متباعدة	إذا كان $q \leq -1$ فإن المتتالية (u_n) متباعدة (النهاية غير موجودة)
6- اتجاه التغير :	6- اتجاه التغير : نفرض أن $u_n > 0$
إذا كان $r > 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً	إذا كان $q > 1$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً
إذا كان $r < 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً	إذا كان $q < 1$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً
إذا كان $r = 0$ فإن المتتالية (u_n) ثابتة	إذا كان $q = 1$ فإن المتتالية (u_n) ثابتة

تعاريف وَ مبرهنات

7- عدد الحدود : عدد الحدود = دليل الحد الأخير − دليل الحد الأول +1

8- متتالية محدودة من الأعلى ، محدودة من الأسفل ، متتالية محدودة :

- المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى يعني : $u_n \leq A$.
- المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل يعني : $u_n \geq B$.
- المتتالية (u_n) محدودة يعني أنها محدودة من الأعلى و محدودة من الأسفل .

9- مبرهنات تقارب متتالية :

- إذا كانت (u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة .
- إذا كانت (u_n) متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة .

10- المتتاليتان المتجاورتان :

تكون المتتاليتان (u_n) وَ (v_n) متجاورتان إذا كانت إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة وَ $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

★ الأعداد المركبة ★

① الشكل الجبري ، الشكل المثلثي وَ الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم

الشكل الجبري	الشكل المثلثي	الشكل الأسي
$z=x+iy$ مع $i^2=-1$	$z=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$	$z=re^{i\theta}$
الجزء الحقيقي : $x=\text{Re}(z)$	طويلة z : $r=\lvert z\rvert=\sqrt{x^2+y^2}$	ترميز أولر: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$
الجزء التخيلي : $y=\text{Im}(z)$	عمدة z : $\arg(z)=\theta+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.	$\cos\theta=\frac{x}{r}$ وَ $\sin\theta=\frac{y}{r}$
مرافق z : $\overline{z}=x-iy$		

خواصه	خواصه	خواصه
① $z=0$ إذا كان $x=0$ وَ $y=0$	① $\arg(z.z')=\arg(z)+\arg(z')$	① $-e^{i\theta}=e^{i(\theta+\pi)}$
② $z=z'$ إذا كان $x=x'$ وَ $y=y'$ مع $z'=x'+iy'$	② $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')$	② $z.z'=r.r'e^{i(\theta+\theta')}$
③ z حقيقي إذا كان $z=\overline{z}$	③ $\arg\left(\frac{1}{z}\right)=-\arg(z)$	③ $\frac{z}{z'}=\frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$
④ z تخيلي صرف إذا كان $z=-\overline{z}$	④ $\arg\left(\overline{z}\right)=-\arg(z)$	④ $\frac{1}{z}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$
⑤ $z\times\overline{z}=x^2+y^2$	⑤ $n\in\mathbb{Z}$ مع $\arg\left(z^n\right)=n\arg(z)$	⑤ $\overline{z}=re^{-i\theta}$
⑥ $\lvert z\rvert=\lvert\overline{z}\rvert$ ، $z\times\overline{z}=\lvert z\rvert^2$		⑥ $z^n=r^n\,e^{in\theta}$

② توظيف الطويلة و العمدة في الهندسة

التفسير الهندسي	العبارة المركبة
المسافة بين النقطتين A وَ B	$AB=\lvert z_B-z_A\rvert$
الشعاع $\overrightarrow{AB}$	$z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$
I منتصف القطعة $[AB]$	$z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$
G مركز ثقل المثلث ABC	$z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$
G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\lambda)\}$	$z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\lambda z_C}{\alpha+\beta+\lambda}$
A ، B وَ C على استقامة ($\overrightarrow{AB}$ / / $\overrightarrow{AC}$)	$\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ عدداً حقيقياً
الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ وَ $\overrightarrow{AC}$ متعامدان	$\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ عدداً تخيلياً صرفاً
قيس بالرديان للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{AB})$	$\arg\left(z_B-z_A\right)$
قيس بالرديان للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$	$\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)$

WWW.DZPEN.COM
استعد للبكالوريا مع توامي Maths

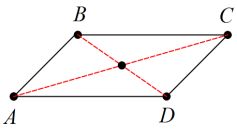
③ متوازي الأضلاع ، المعين ، المربع ، المستطيل وَ المثلثات

متوازي الأضلاع

$ABCD$ متوازي أضلاع يعني أحد الشرطين :

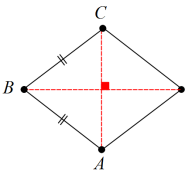
① $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ أي: $z_B - z_A = z_C - z_D$

② القطران متناصفان أي: $\dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{z_B + z_D}{2}$



المعين

$ABCD$ معين يعني أحد الشرطين :



① $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ أي: $z_B - z_A = z_C - z_D$

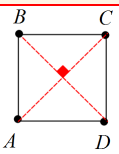
وَ $AB = AD$ أي: $|z_B - z_A| = |z_D - z_A|$

② القطران متناصفان وَ متعامدان أي :

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}\right) = \pm\frac{\pi}{2} \text{ وَ } \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$$

المربع

$ABCD$ مربع يعني أحد الشرطين :



① $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ أي: $z_B - z_A = z_C - z_D$

وَ $AB = AD$ أي: $|z_B - z_A| = |z_D - z_A|$

وَ $\arg\left(\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2}$ أي: $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2}$

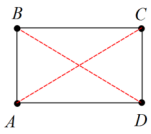
② القطران متناصفان وَ متعامدان وَ متساويان أي:

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}\right) = \pm\frac{\pi}{2} \text{ وَ } \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$$

وَ $|z_A - z_C| = |z_B - z_D|$

المستطيل

$ABCD$ مستطيل يعني أحد الشرطين :



① $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ أي: $z_B - z_A = z_C - z_D$

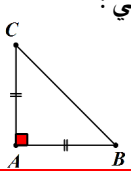
وَ $\arg\left(\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2}$ أي: $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2}$

② القطران متناصفان وَ متساويان أي:

$$|z_A - z_C| = |z_B - z_D| \text{ وَ } \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$$

المثلث القائم و المتساوي الساقين

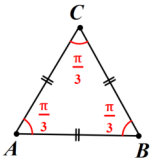
ABC مثلث قائم في A وَ متساوي الساقين يعني :



$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pm\frac{\pi}{2} \text{ وَ } \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$$

المثلث المتقايس الأضلاع

ABC مثلث متقايس الأضلاع يعني أحد الشرطين :



① $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pm\dfrac{\pi}{3}$ وَ $\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$

② $|z_A - z_B| = |z_A - z_C| = |z_B - z_C|$

④ التحويلات النقطية في المستوي المركب

العبارة المركبة للتحويل f هي : $z' = a\,z + b$

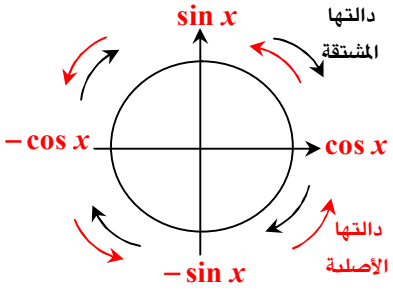
a عدد حقيقي		a عدد مركب (غير حقيقي)	
$a = 1$	$a \neq 1$	$\lvert a\rvert = 1$	$\lvert a\rvert \neq 1$
f انسحاب شعاعه $\vec{u}$ ذات اللاحقة b ($b \neq 0$)	f تحاكي نسبته $k = a$ مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $z_\Omega = \dfrac{b}{1-a}$	f دوران مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $z_\Omega = \dfrac{b}{1-a}$ زاويته $\theta = \arg(a)$	f تشابه مباشر نسبته $k = a$ زاويته $\theta = \arg(a)$ مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $z_\Omega = \dfrac{b}{1-a}$
العبارة المختصر للتحويل f			
$z' - z_\omega = k\,e^{i\theta}\left(z - z_\omega\right)$	$z' - z_\omega = k\left(z - z_\omega\right)$	$z' - z_\omega = e^{i\theta}\left(z - z_\omega\right)$	$z' - z_\omega = k\,e^{i\theta}\left(z - z_\omega\right)$

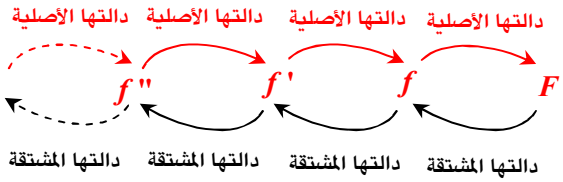
WWW.DZPEN.COM

★ الدوال الأصلية و الحساب التكاملي ★

① الدوال الأصلية

	السؤال	الجواب
❶	ما هو شرط وجود دالة أصلية F للدالة f على المجال I	الشرط أن تكون الدالة f مستمرة على المجال I
❷	كم عدد الدوال الأصلية للدالة f على المجال I	الدالة f تقبل عدد غير منتهي من الدوال الأصلية و هي : $F(x)+k$ حيث $k\in\mathbb{R}$
❸	أثبت أن الدالة F أصلية للدالة f على المجال I	يكفي إثبات من أجل كل $x\in I$: $F'(x)=f(x)$
❹	بين أن الدالتان F و G أصليتان لنفس الدالة على المجال I	يكفي إثبات من أجل كل $x\in I$: $F'(x)=G'(x)$





② الدوال الأصلية لدوال مألوفة

$f(x)=$	$F(x)=$	$I=$
a (a عدد حقيقي)	$ax+c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2+c$	$\mathbb{R}$
x^n $(n\in\mathbb{N}^*)$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+c$	$]-\infty;0[$ أو $]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^n}$ $(n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2)$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+c$	$]-\infty;0[$ أو $]0;+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$]0;+\infty[$
e^x	e^x+c	$\mathbb{R}$
e^{ax+b} $(a\in\mathbb{R}^*$ و $b\in\mathbb{R})$	$\frac{1}{a}e^{ax+b}+c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x+c$	$]0;+\infty[$
$\ln x$	$x\ln x-x+c$	$]0;+\infty[$
$\ln(x-a)$ $(a\in\mathbb{R})$	$(x-a)\ln(x-a)-x+c$	$]a;+\infty[$

③ الدوال الأصلية و العمليات على الدوال

الدالة f	الدوال الأصلية للدالة f على I	شروط على الدالة u
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2+c$	
$(n\in\mathbb{N}^*)\ u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}+c$	من أجل كل x من I، $u(x)\neq 0$
$(n\geq 2$ و $n\in\mathbb{N})\ \frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$	من أجل كل x من I، $u(x)\neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	من أجل كل x من I، $u(x)>0$
$u'e^u$	e^u+c	
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert+c$	$u(x)\neq 0$

④ المعادلات التفاضلية

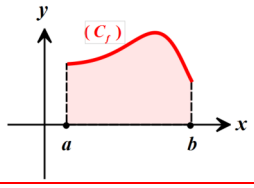
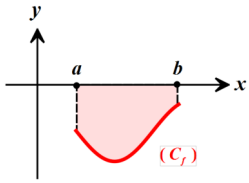
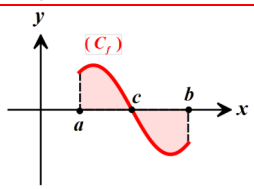
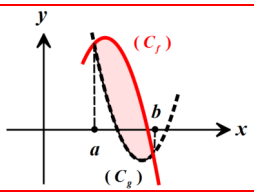
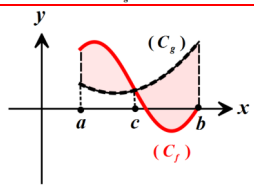
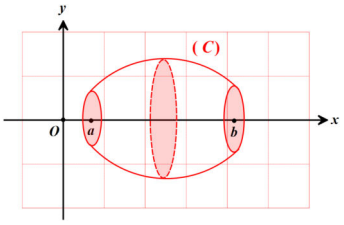
المعادلة التفاضلية	حلول المعادلة
$y'=a\,y$	$y=C\,e^{a\,x}$
$y'=a\,y+b$	$y=C\,e^{a\,x}-\frac{b}{a}$
$y'=f(x)$	$y=F(x)+c$
$y''=f'(x)$	$y=F(x)+c_1x+c_2$
$y''=-\omega^2 y$	$y=c_1\cos\omega\,x+c_2\sin\omega\,x$

⑤ الحساب التكاملي

التكامل المحدود	$\int_a^b f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$
التكامل الغير محدود	$\int f(x)\,dx=F(x)+k$
علاقة شال	$\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx$
المكاملة بالتجزئة	$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx=\left[u(x)v(x)\right]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\,dx$
القيمة المتوسطة على مجال	$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

WWW.DZPEN.COM

⑥ حساب المساحات و الحجوم

المساحات S	التمثيل البياني لها
$S=\int_a^b f(x)\,dx$	
$S=\int_a^b -f(x)\,dx$	
$S=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b -f(x)\,dx$	
$S=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$	
$S=\int_a^c [f(x)-g(x)]\,dx+\int_c^b [g(x)-f(x)]\,dx$	
الحجوم V	**التمثيل البياني لها**
حجم مجسم مولد بالدوران حول المحور $(x'x)$ لمنحن (C) $V=\int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$	

ملاحظة هامة : كل المساحات يجب أن تضرب في الوحد ua حيث : $ua=\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$

WWW.DZPEN.COM

★ الاحتمالات ★

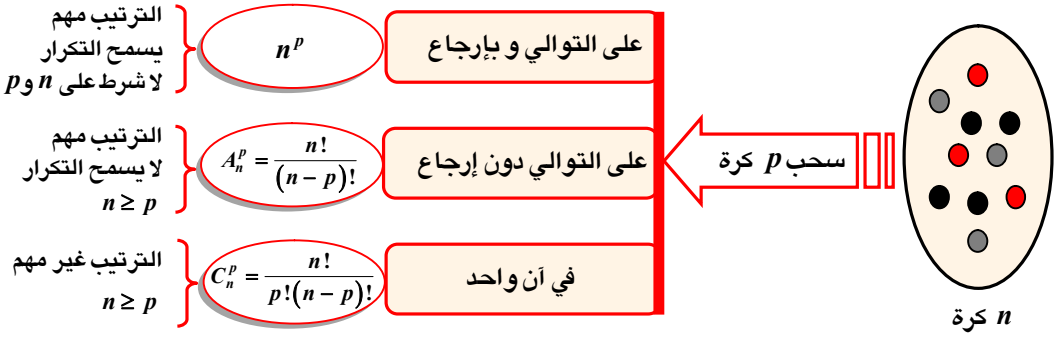
احتمال الحادثة A	$P(A)=\dfrac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة (الكلية)}}$
احتمال الحادثة العكسية $\overline{A}$	$P(\overline{A})=1-P(A)$
الاحتمال الشرطي (A علماً B)	$P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$
الحوادث المستقلة	$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

① أنواع السحب

توجد ثلاث أنواع من السحب و هي :

❶ السحب في آن واحد ❷ السحب على التوالي و بإرجاع ❸ السحب على التوالي و بدون إرجاع

– ما هو عدد طرق لسحب p كرة من كيس يحتوي على n كرة ($n\geq 2$) ؟



② اللجان (الجمعيات)

عند تكوين لجنة معينة أو جمعية من عدة أشخاص ، يجب معرفة أمرين أساسيان ، هما :

❶ ذكر وظيفة الأشخاص في اللجنة ❷ عدم ذكر وظيفة الأشخاص في اللجنة .

– ما هو عدد طرق لتكوين لجنة تتألف من p شخص من بين مجموعة ذات n شخص مع ($n\geq 2$) ؟



③ عدد طرق لإجراء تجربة

عند إجراء تجربة معينة بـ n_1 طريقة (إمكانية) و تجربة أخرى بـ n_2 طريقة (إمكانية) فإن :

❶ عدد طرق إجراء التجربتين معاً (التجربة الأولى و الثانية) هو الجداء : $n_1\times n_2$.

❷ عدد طرق إجراء إحدى التجربتين فقط (التجربة الأولى أو الثانية) هو المجموع : n_1+n_2 .

WWW.DZPEN.COM
استعد للبكالوريا مع توامي Maths

★ الموافقات-الأعداد الأولية ★

① الموافقات في $\mathbb{Z}$

تعريف	نقول أن العددين الصحيحين a ، b متوافقان بتردد n (طبيعي) إذا وفقط إذا كان $a-b$ من مضاعفات n في $\mathbb{Z}$ وَ نكتب $a \equiv b\left[n\right]$ وَ يقرأ a يوافق b بتردد n .
خواص	إذا كان: $a \equiv b\left[n\right]$ وَ $b \equiv c\left[n\right]$ فإن: $a \equiv c\left[n\right]$. إذا كان: $a \equiv b\left[n\right]$ وَ $c \equiv d\left[n\right]$ فإن: $a \pm c \equiv b \pm d\left[n\right]$ وَ $a \times c \equiv b \times d\left[n\right]$. إذا كان: $a \equiv b\left[n\right]$ فإن: $a+k \equiv b+k\left[n\right]$ وَ $k \times a \equiv k \times b\left[n\right]$ حيث $k \in \mathbb{Z}$. إذا كان: $a \equiv b\left[n\right]$ فإن: $a^p \equiv b^p\left[n\right]$ حيث $p \in \mathbb{N}$. إذا كان: $a \equiv b\left[n\right]$ فإن: $a+k\,n \equiv b\left[n\right]$ وَ $a \equiv b+k\,n\left[n\right]$. إذا كان: $a \equiv 0\left[n \times m\right]$ فإن: $a \equiv 0\left[n\right]$ وَ $a \equiv 0\left[m\right]$ حيث $m \in \mathbb{N}^*$ وَ أولي مع n . إذا كان: $a \times b \equiv 0\left[n\right]$ فإن: $a \equiv 0\left[n\right]$ أو $b \equiv 0\left[n\right]$ مع n عدد أولي.

② القاسم المشترك الأكبر PGCD وَ المضاعف المشترك الأصغر PPCM

خواص	$PGCD\left(a;b\right)=PGCD\left(b;r\right)$ حيث $a \geq b$ وَ r باقي قسمة a على b . $PGCD\left(k\,a;k\,b\right)=k \times PGCD\left(b;r\right)$ حيث: $k \in \mathbb{Z}^*$. $PGCD\left(a;b\right) \times PPCM\left(a;b\right)=a \times b$ إذا كان: $PGCD\left(a;b\right)=d$ فإن: ($d \setminus a$ وَ $d \setminus b$) و أيضاً: $\begin{cases} a=d\,a' \\ b=d\,b' \end{cases}$ مع $PGCD\left(a';b'\right)=1$ $PGCD\left(k\,a;k\,b\right)=\left|k\right|PGCD\left(a;b\right)$ مع $k \in \mathbb{Z}^*$. إذا كان: $PGCD\left(a;b\right)=1$ فإن: $PGCD\left(a;b^n\right)=1$ مع $n \in \mathbb{N}^*$. إذا كان: $PGCD\left(a;b\right)=1$ فإن: $PGCD\left(a^n;b^n\right)=1$ مع $n \in \mathbb{N}^*$. إذا كان: $PGCD\left(a;b\right)=1$ وَ $PGCD\left(a;c\right)=1$ فإن: $PGCD\left(a;b\,c\right)=1$.

③ مبرهنة بيزو

يكون العددان الطبيعيان غير المعدومين a وَ b أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا وجد عددان صحيحان x وَ y حيث: $a\,x+b\,y=1$

④ مبرهنة غوص

a ، b وَ c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة ، إذا كان a يقسم الجداء $b\,c$ وَ كان a أولياً مع b ، فإن a يقسم c .

⑤ المبرهنة الصغيرة لفيرما

إذا كان p عددا أولياً و a عدداً طبيعياً لا يقبل القسمة على p فإن p يقسم العدد $\left(a^{p-1}-1\right)$

WWW.DZPEN.COM
استعد للبكالوريا مع توامي Maths