موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

عن موقع www.eddirasa.com

البريد الإلكتروني: info@eddirasa.com

# الدوالُ الأصليةُ وحِسابُ التكاملاتِ

## 1 - مفهوم التكامل على مجال

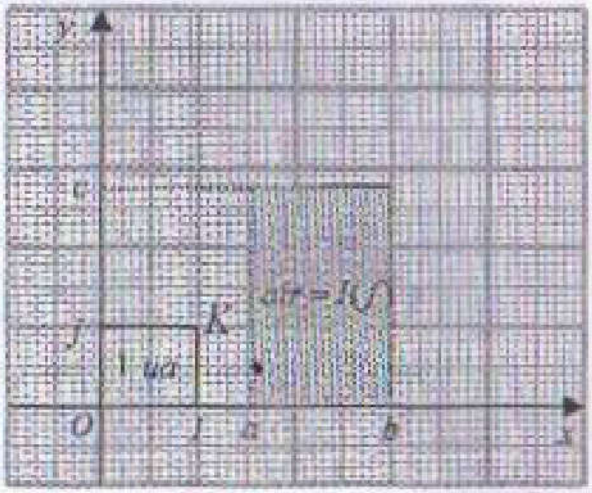
### 1-1 تكامل دالة درجية

نقول أن $f$ دالة درجية على المجال $[a,b]$ عندما نستطيع إيجاد تقسيم لـ $[a,b]$ مشكل من الأعداد الحقيقية $x_0=a$ ، $x_1$ ، $x_2$ ، ... ، $x_n=b$ بحيث $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$ و بحيث الدالة $f$ ثابتة على كل مجال من الشكل $]x_{i-1}, x_i[$ حيث $1 \leq i \leq n$.

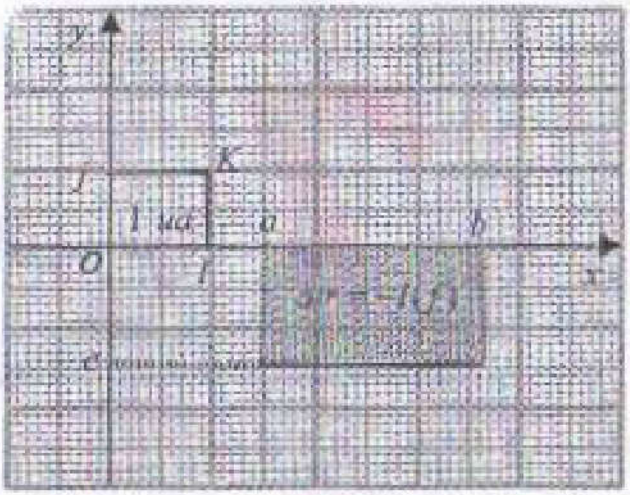


حالة دالة ثابتة على $[a,b]$

$f$ دالة معرفة على مجال $[a,b]$ بحيث من اجل كل $x$ من $]a,b[$ لدينا $f(x)=c$.
القيمتان $f(a)$ و $f(b)$ يمكن أن تكونا مختلفتين عن العدد $c$.
بالتعريف تكامل الدالة $f$ على المجال $[a,b]$ هو العدد الحقيقي $I(f)$
بحيث $I(f)=(b-a)\times c$




لما $0 \leq c$ تكامل الدالة $f$ هو مساحة المستطيل اللون وحدة المساحة هي مساحة المستطيل $OIKJ$



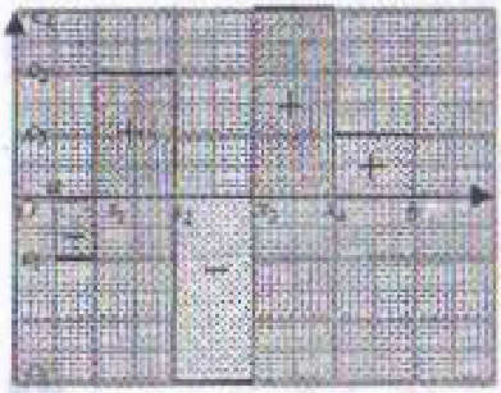

لما $c \leq 0$ تكامل الدالة $f$ هو عكس مساحة المستطيل اللون.

## حالة دالة درجية على المجال $[a,b]$

إذا كان من أجل كل $x$ من $]x_{i-1}, x_i[$ لدينا $f(x)=c_i$ فإن تكامل $f$ على $[a,b]$ هو العدد $I(f)$ المعرف بـ:

$$I(f)=(x_1-x_0)c_1+(x_2-x_1)c_2+\ldots+(x_n-x_{n-1})c_n$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})c_i$$



التكامل $I(f)$ على المجال $[a,b]$

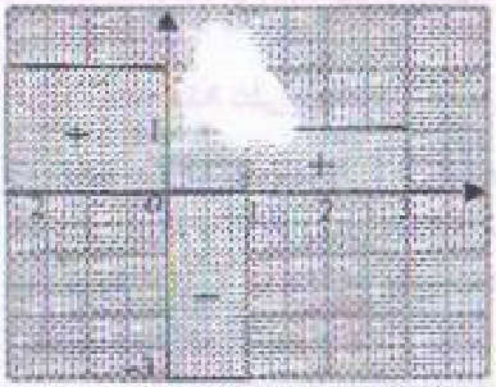
نرمز له بـ $\int_a^b f(t)dt$ والذي يقرأ تكامل من $a$ إلى $b$ لـ $f(t)$ تفاضل $t$.

### ملاحظة

بما أن المتغير $t$ أيكم نستطيع استبداله بأي متغير آخر و عليه :

$$\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(u)du=\ldots$$

### مثال ـ ♦



$g$ دالة درجية معرفة على المجال $[-2,3]$ بـ:

$$\begin{cases} g(x)=2 & ,0 \geq x \geq -2 \\ g(x)=-3 & ,1 \geq x \geq 0 \\ g(x)=1 & ,3 \geq x > 1 \end{cases}$$

$(\gamma_g)$ منحناها في معلم متعامد و متجانس

لنحسب $I(g)$

$$I(g)=(0+2)\times 2+(1-0)\times(-3)+(3-1)\times 1$$
$$=+4-3+3=4$$

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

## 1 - 2 تكامل دالة مستمرة

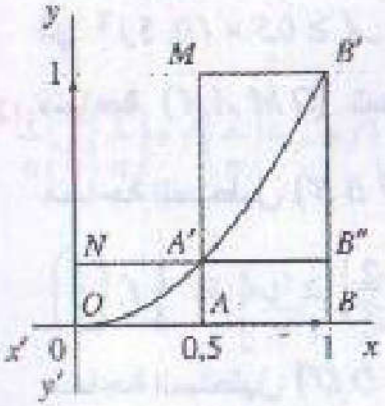
### حصر مساحة

مثال - ◆

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $[0,1]$ بـ $f(x)=x^2$ و $(\gamma)$ قوسا من القطع المكافئ $(\rho)$ المثل للدالة $f$ في معلم متعامد و متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$.

نريد تعيين حصر لمساحة حيزمن المستوى تحت المنحني المثل للدالة $f$ المحدد بالقوس $(\gamma)$

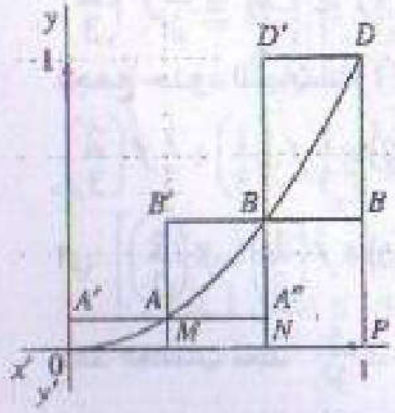
و محور الفواصل $(x'x)$ و المستقيم ذي المعادلة $x=1$ و لتكن $\mathcal{A}$.




1) نقوم بتقسيم المجال $[0,1]$ إلى مجالين لهما نفس الطول $0,5$.

على المجال $[0,0,5]$ المساحة التي نبحث عنها محصورة بين $0$ و مساحة المستطيل $AONA'$ و على المجال $[0,5,1]$ المساحة التي نبحث عنها محصورة بين مساحتي المستطيلين $ABB'A'$ و $ABB''M$.

اعط حصرا للمساحة $\mathcal{A}$ على المجال $[0,1]$.




2) نقوم بتقسيم المجال $[0,1]$ إلى ثلاثة مجالات طول كل منها $\frac{1}{3}$ و عليه فالمساحة التي نبحث عنها محصورة بين مساحتي المستطيلين $AA''NM$ و $B'BNM$.

على المجال $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$

- أعط حصرا للمساحة $\mathcal{A}$ ثم قارنه مع الحصر المحصل عليه في السؤال 1.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

3) نقسم المجال $[0,1]$ إلى $n$ مجال وطول كل منها $\frac{1}{n}$

و لنعتبر المجال $I=\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$ مع $k$ عدد طبيعي محصور بين $0$ و $n-1$.

أ) أعط حصرا لمساحة حيز من المستوي تحت المنحنى الممثل للدالة $f$ على $I$ بدلالة $n$ و $k$.

ب) أعط حصرا للمساحة $\mathcal{A}$ مبينا أن $\mathcal{A}$ محصورة بين متتاليتين $(U_n)$ و $(V_n)$ بحيث $V_n \geq \mathcal{A} \geq U_n$ أوجد عبارتهما.

( يعطى $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(3n+1)}{6}$ )

جـ) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ماذا تستنتج بالنسبة إلى $\mathcal{A}$ ؟

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

## ✓ الحل

1) مساحة $(AOA'N)$ تساوي $0,5\times f(0,5)$ ومنه :

$0,5\times f(0,5)\geq \mathcal{A}_0\geq 0$ ... (1)

مساحة $(AIB'M)$ تساوي $0,5\times f(1)$ ومنه :

$0,5\times f(0,5)\geq A_1\geq 0,5\times f(1)$ ... (2)

بجمع طرفي (1) و (2) نجد $0,5(f(0,5)+f(1))\geq \mathcal{A}_0+\mathcal{A}_1\geq 0,5\times f(0,5)$

أي $0,5\left((0,5)^2+1^2\right)\geq \mathcal{A}\geq 0,5\times(0,5)^2$ بالحساب نجد $0,625\geq \mathcal{A}\geq 0,125$.

2) مساحة $(OMA'A)$ تساوي $\frac{1}{3}\times f(\frac{1}{3})$ ومنه $\frac{1}{3}f(\frac{1}{3})\geq \mathcal{A}_0\geq 0$ ... (1).

مساحة المستطيل $(MNBB')$ تساوي $\frac{1}{3}\times f(\frac{2}{3})$ ومنه:

$\frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right)\geq \mathcal{A}_1\geq \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)$ .....(2).

مساحة المستطيل $(NPDD')$ تساوي $\frac{1}{3}\times f(1)$ ومنه:

$\frac{1}{3}f(1)\geq \mathcal{A}_2\geq \frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right)$ .....(3).

بجمع حدود المتباينات (1) و (2) و (3) نجد:

$$\frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3}f(1)\geq \mathcal{A}_0+\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2\geq \frac{1}{3}f(0)+\frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right)$$

أي $\left[f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+f(1)\right]\geq \mathcal{A}\geq \frac{1}{3}\left[f(0)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)\right]$

بعد الحساب نجد $\frac{14}{3^3}\geq \mathcal{A}\geq \frac{5}{3^3}$ أي $0,51\geq \mathcal{A}\geq 0,18$.

من السؤالين (1) و (2) نلاحظ أن التقسيم الثاني أعطى لنا حصرا أفضل من الحصر المحصل عليه في السؤال (1) و عليه كلما كانت التقسيمات كثيرة كان حصر للساحة $\mathcal{A}$ أدق.

3) أ) نرمز بـ $\mathcal{A}_k$ إلى مساحة حيز من المستوي تحت المنحني الممثل للدالة $f$ على المجال $I$، هذه المساحة محصورة بين مساحة المستطيلين $F_1F_1'F_2'F_2$ و $F_2F_2'F_3'F_3$.

مساحة $(F_1F_1'F_2'F_2)$ تساوي $\frac{1}{n}\times f\left(\frac{k}{n}\right)$

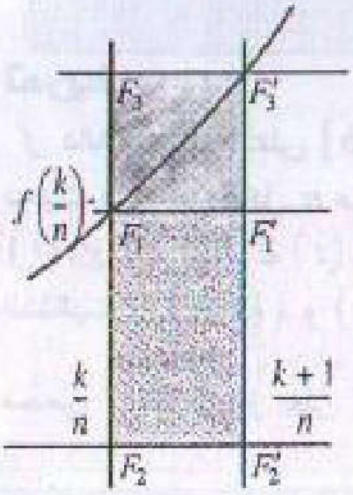
مساحة $(F_2F_2'F_3'F_3)$ تساوي $\frac{1}{n}\times f\left(\frac{k+1}{n}\right)$

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

إذن $\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\geq \mathcal{A}_k\geq \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$.

نضع $g_n(t)=f\left(\frac{k}{n}\right)$ و $h_n(t)=f\left(\frac{k+1}{n}\right)$

مع $k$ ينتمي إلى $\{0,1,...,n-1\}$ و $t\in\left]\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right[$.




ب) $\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\geq \mathcal{A}_0\geq \frac{1}{n}f(0)$

$\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)\geq \mathcal{A}_1\geq \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$

$\vdots$

$\frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right)\geq \mathcal{A}_{n-1}\geq \frac{1}{n}f\left(\frac{n-1}{n}\right)$

بجمع حدود المتباينات السابقة طرفا لطرف نجد :

$$\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+...+f\left(\frac{n}{n}\right)\right]\geq \mathcal{A}_0+\mathcal{A}_1+...+\mathcal{A}_{n-1}\geq\frac{1}{n}\left[f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+...+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

و بما أن $\mathcal{A}=\mathcal{A}_0+\mathcal{A}_1+..+\mathcal{A}_{n-1}$ فإنه نستنتج :

$$\frac{1}{n}\left[\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+....+\frac{n^2}{n^2}\right]\geq \mathcal{A}\geq\frac{1}{n}\left[\frac{0^2}{n^2}+\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+...+\frac{(n-1)^2}{n^2}\right]$$

$$\frac{1}{n^3}\left[1^2+2^2+...+n^2\right]\geq \mathcal{A}\geq\frac{1}{n^3}\left[0^2+1^2+...+(n-1)^2\right]$$

بوضع $U_n=\frac{1}{n^3}\left[0^2+1^2+...+(n-1)^2\right]$ و $V_n=\frac{1}{n^3}\left[1^2+2^2+...+n^2\right]$.

تصبح المتباينة السابقة كما يلي $V_n\geq \mathcal{A}\geq U_n$.

$$U_n=\frac{1}{n^3}\times\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}\quad\text{و}\quad V_n=\frac{1}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$U_n$ هي مساحة حيز من المستوي تحت المنحني للدالة الدرجية $g_n$ و لتكن $I(g_n)$

$V_n$ هي مساحة حيز من المستوي تحت المنحني للدالة الدرجية $h_n$ و لتكن $I(h_n)$

جـ) $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\lim\frac{2n^3}{6n^3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=\lim\frac{2n^3}{6n^3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

بما أن $V_n \geq \mathcal{A} \geq U_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \frac{1}{3}$ .

فإن حسب نظرية الحصر نستنتج $\mathcal{A} = \frac{1}{3}$ .

يمكننا التأكد من أن $(U_n)$ و $(V_n)$ متتاليتان متجاورتان و عليه فالمتتاليتان $(U_n)$ و $(V_n)$ متقاربتين نحو نفس النهاية $\ell = \frac{1}{3}$ ، نقول ان هذه النهاية المشتركة $\ell$ هي تكامل $f$ على المجال $[0,1]$ و نرمز له بـ $\int_0^1 f(t)dt$ و نكتب $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{3}$

## تعريف

$f$ دالة مستمرة على $[a,b]$ ، نتقبل انه توجد متتاليتين لدالتين درجيتين $(g_n)$ و $(h_n)$ بحيث من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}^*$ و من اجل $t$ من $[a,b]$

$g_n(t) \leq f(t) \leq h_n(t)$ ... (1).

المتتاليتان $(I(g_n))$ و $(I(h_n))$ متقاربتان نحو نفس النهاية $\ell$ ... (2)

نسمي $\ell$ تكامل $f$ على $[a,b]$ و نكتب $\ell = \int_a^b f(t)dt$

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

### ملاحظة

1) إذا كانت $(s_n)$ و $(S_n)$ متتاليتين لدالتين درجيتين لهما نفس خصائص $(g_n)$ و $(h_n)$ فإن $\ell$ هي كذلك نهاية $I(s_n)$ و $I(S_n)$ .

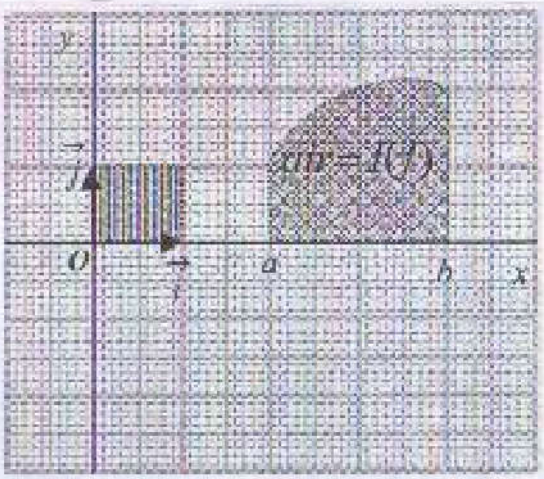
2) تجاور المتتاليتين $(I(g_n))$ و $(I(h_n))$ متعلق بطريقة تقسيم المجال $[a,b]$ .

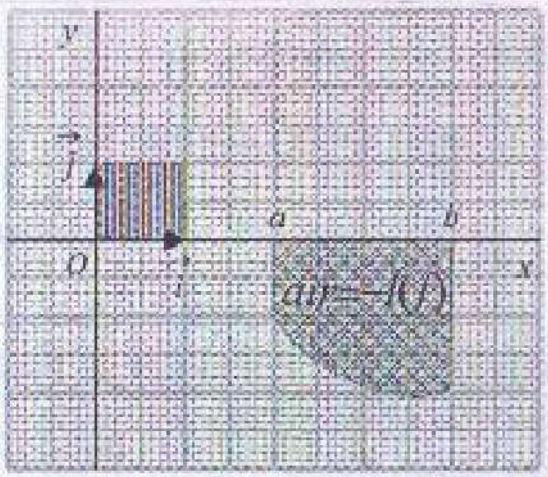
- إذا قسمنا المجال $[a,b]$ إلى $2^n$ مجال طول كل منها $\frac{b-a}{2^n}$ نتحصل دائما على متتاليتين $(I(g_n))$ و $(I(h_n))$ متجاورتين و هذا مهما كانت طبيعة $f$ .
( $f$ رتيبة أو غير رتيبة، موجبة أو سالبة).

- إذا قسمنا المجال $[a,b]$ إلى $n$ مجال طول كل منها $\frac{b-a}{n}$ فالمتتاليتان $(I(g_n))$ و $(I(h_n))$ المحصل عليهما متقاربتان نحو $\int_a^b f(t)dt$ لكن حتى و لو كانت $f$ رتيبة على $[a,b]$ لسنا متأكدين من تجاور هاتين المتتاليتين.

3) إذا كانت الدالة $f$ مستمرة و موجبة فإن العدد $I(f)$ موجب و يعبر عن مساحة حيز من المستوي تحت المنحني الممثل للدالة $f$ .

- إذا كانت $f$ مستمرة و سالبة فإن العدد $I(f)$ يعبر عن نظير مساحة حيز من المستوي تحت المنحني الممثل للدالة $f$ .

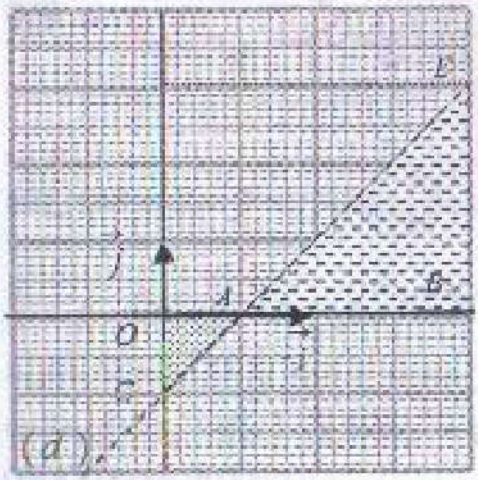



## تمرين تدريبي ❶

لتكن $f$ دالة معرفة بـ $f(x)=2x-1$ .

احسب التكاملين التاليين $J=\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(t)\,dt$ ، $I=\int_{0}^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt$




✓ الحل

الدالة $f$ ممثلة بالمستقيم $(d)$ الذي يقطع محور الفواصل في النقطة $A\left(\frac{1}{2},0\right)$ ولتكن $B(2,0)$ من محور الفواصل

لتكن $E$ نقطة من $(d)$ فاصلتها 2 و ترتيبها 3 .

$(d)$ يقطع محور التراتيب في $C(0,-1)$

- على المجال $\left[\frac{1}{2},2\right]$ الدالة $f$ موجبة

ومنه $J$ هو مساحة المثلث $ABE$ والتي تساوي $\frac{9}{4}$ وحدة المساحات وبالتالي $J=\frac{9}{4}$ .

- على المجال $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ الدالة $f$ سالبة ومنه $I$ نظير مساحة المثلث $OCA$ التي هي $\frac{1}{4}$

ومنه $I=-\frac{1}{4}$ .

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

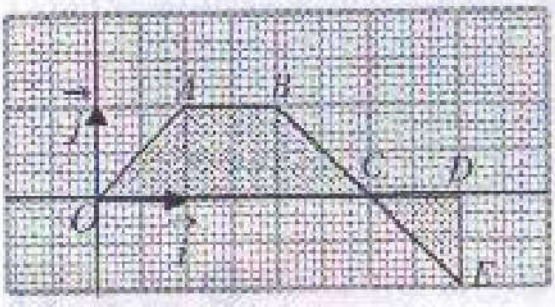
## تمرين تدريبي ❷

$f$ دالة معرفة على المجال $[0,4]$ بـ

$$\begin{cases} f(x)=x & , x\in[0,1] \\ f(x)=1 & , x\in[1,2] \\ f(x)=-x+3 & , x\in[2,4] \end{cases}$$

احسب التكاملين $I$ و $J$ التاليين $I=\int_{0}^{3} f(t)dt$ ، $J=\int_{3}^{4} f(t)dt$
ثم احسب $I+J$ .

✓ الحل




- على المجال $[0,3]$ الدالة $f$ موجبة
ومنه $I$ هو مساحة شبه المنحرف $OABC$
والتي تساوي $\frac{(3+1)\times 1}{2}$ اي 2
ومنه $I=2$ وحدة المساحات
- على المجال $[3,4]$ الدالة $f$ سالبة
ومنه $J$ هو نظير مساحة المثلث $CED$ التي تساوي $\frac{1}{2}$ ومنه $J=\frac{-1}{2}$
إذن $I+J=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

## 2 - خواص التكامل

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

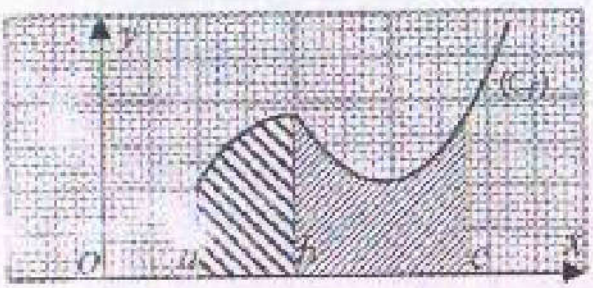
مبرهنة
كل دالة مستمرة على مجال $[a,b]$ تقبل تكاملا على هذا المجال.

### 2 - 1 تمديد تعريف التكامل إلى $a$ و $b$ كيفيين

عرفنا تكامل دالة درجية او مستمرة على مجال $[a,b]$ مع $a$ ( $b$ و الآن إذا كانت $f$ دالة مستمرة على مجال $I$ ، و كان $a$ و $b$ عددين من $I$ بحيث $a \geq b$
نضع التعريف التالي :

لما $a)b$ تكون $\int_{a}^{b} f(t)dt=-\int_{b}^{a} f(t)dt$ ولما $a=b$ تكون $\int_{b}^{a} f(t)dt=0$

### 2 - 2 علاقة شال



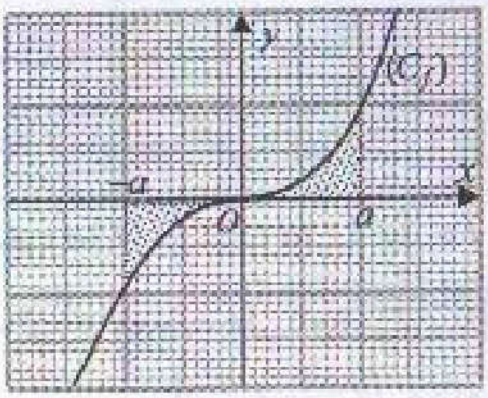

مبرهنة
$f$ دالة مستمرة على $I$ . مهما تكن الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ ، $c$ من $I$

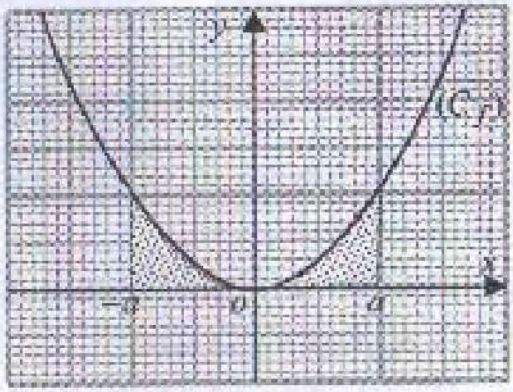
$$\int_{a}^{b} f(t)dt+\int_{b}^{c} f(t)dt=\int_{a}^{c} f(t)dt$$

**نتيجة**

1) اذا كانت $f$ زوجية على $[-a,a]$ فإن $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$

2) إذا كان $f$ فردية على $[-a,a]$ فإن $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$




**الإثبات**

حسب علاقة شال لدينا $\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt$

1) إذا كانت $f$ زوجية فإن الحيزين الملونين لهما نفس المساحة وعليه :

$\int_{-a}^{0} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(t)dt$ ومنه $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$

2) إذا كانت $f$ فردية فإن الحيزين الملونين لهما نفس المساحة وعليه :

$\int_{-a}^{0} f(t)dt = -\int_{0}^{a} f(t)dt$

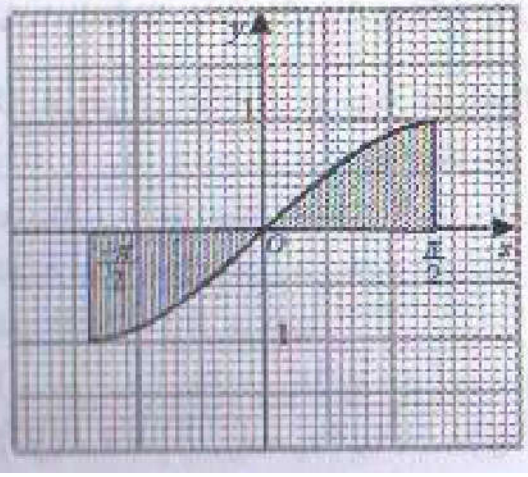
ومنه $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

**مثال 1**

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \sin x$

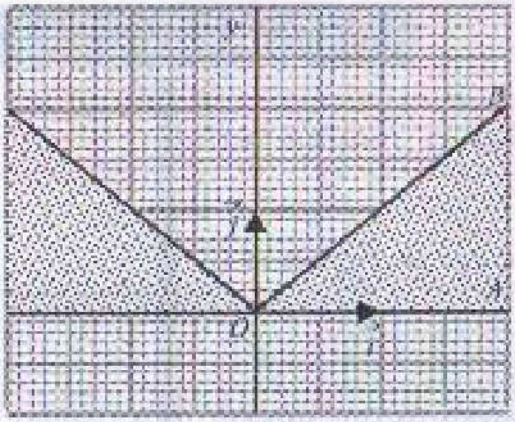
احسب التكامل $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$




✓ الحل

الدالة $f$ فردية على المجال $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

ومنه $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = 0$.



**مثال ❷**

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=|x|$

احسب التكامل $I=\int_{-2}^{2} f(t)dt$

**✓ الحل**

الدالة $f$ زوجية على المجال $[-2\ ,\ 2]$

ومنه $I=\int_{-2}^{2} f(t)dt=2\int_{0}^{2} f(t)dt$

وبما أن $f$ موجبة على المجال $[0\ ,\ 2]$

فإن $\int_{0}^{2} f(t)dt$ تساوي مساحة المثلث $OAB$ التي هي 2 وحدة المساحات

وعليه $I=2\int_{0}^{2} f(t)dt=2\times 2=4$.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

## 2 - 3 خطية التكامل

**مبرهنة**

$f$ و $g$ دالتان مستمرتان على مجال $I$ و $\lambda$ عدد حقيقي كيفي.

مهما يكن العددان الحقيقيان $a$ و $b$ من $I$ لدينا

$$\int_a^b \lambda f(t)dt=\lambda\int_a^b f(t)dt \quad \text{و} \quad \int_a^b (f+g)(t)dt=\int_a^b f(t)dt+\int_a^b g(t)dt$$

**الإثبات**

نثبت المساواة $\int_a^b \lambda f(t)dt=\lambda\int_a^b f(t)dt$ أي $I(\lambda f)=\lambda I(f)$

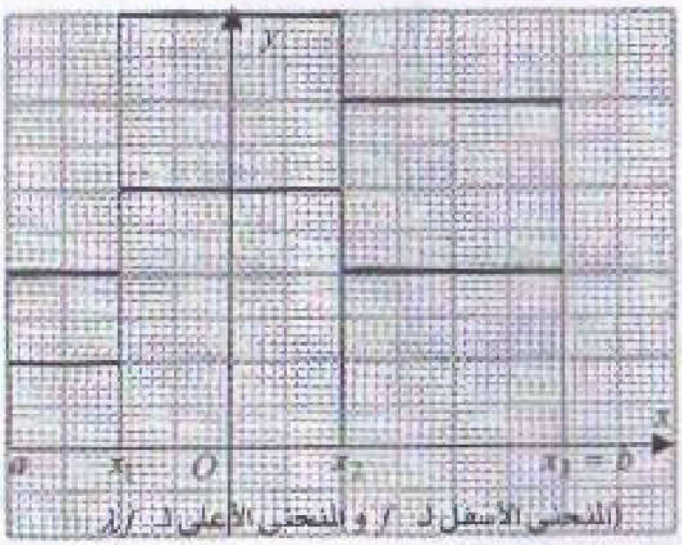
1) نفرض أن الدالة $f$ درجية على المجال $[a\ ,\ b]$ إذن يوجد تقسيم لـ $[a\ ,\ b]$ مع $x_0=a$ و $x_n=b$ وبحيث من أجل كل $x$ من $]x_{i-1}\ ,\ x_i[$ : $f(x)=c_i$ مع $1\le i\le n$

عندئذ من أجل كل $x$ من $]x_{i-1}\ ,\ x_i[$ : $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)=\lambda c_i$ وعليه $\lambda f$ ثابتة على كل مجال من هذه المجالات

إذن فالدالة $\lambda f$ درجية.

$$I(\lambda f)=\lambda c_1(x_1-x_0)+\ldots+\lambda c_n(x_n-x_{n-1})$$
$$=\lambda\left[c_1(x_1-x_0)+\ldots+c_n(x_n-x_{n-1})\right]=\lambda I(f)$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM



(المنحنى الأسفل لـ f و المنحنى الأعلى لـ g)

2) نفرض أن $f$ دالة مستمرة على المجال $[a\,,b]$

عندئذ من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}^*$ توجد دالتان درجيتان $g_n$ و $h_n$ بحيث من أجل كل $t$ من $[a\,,b]$

يكون $h_n(t) \geq f(t) \geq g_n(t)$

و $I(f)$ النهاية المشتركة للمتتاليتين $(I(g_n))$ و $(I(h_n))$.

- لما $\lambda \geq 0$ فإنه من أجل كل $t$ من $[a\,,b]$ وكل $n$ من $\mathbb{N}^*$ يكون:

$\lambda h_n(t) \geq \lambda f(t) \geq \lambda g_n(t)$

لنبين ان المتتاليتين $(I(\lambda g_n))$ و $(I(\lambda h_n))$ متقاربتان نحو نفس النهاية

بالتعريف تكون $I(\lambda f)$ هي النهاية المشتركة.

بما ان المتتالية $(I(g_n))$ متقاربة نحو $I(f)$ فإن المتتالية $(\lambda I(g_n))$ متقاربة نحو $\lambda I(f)$. وبما أن $g_n$ و $\lambda g_n$ دالتان درجيتان فإن $I(\lambda g_n) = \lambda I(g_n)$ من أجل كل $n \geq 1$

و بالتالي $(I(\lambda g_n))$ متقاربة نحو $\lambda I(f)$.

بنفس الكيفية نبين ان $(I(\lambda h_n))$ متقاربة نحو $\lambda I(f)$

إذن $I(\lambda f) = \lambda I(f)$.

- بضرب التباينة $h_n(t) \geq f(t) \geq g_n(t)$ بالعدد $\lambda$ لما $\lambda < 0$ نجد $\lambda g_n(t) \geq \lambda f(t) \geq \lambda h_n(t)$ ونبرهن بنفس الكيفية السابقة أن $I(\lambda f) = \lambda I(f)$.

3) لما $a \geq b$ فإنه من التعريف ،

$$\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt \quad \text{و} \quad \int_a^b (\lambda f)(t)dt = -\int_b^a (\lambda f)(t)dt$$

و حسب النتيجة السابقة $\int_b^a (\lambda f)(t)dt = \lambda \int_b^a f(t)dt$

إذن $\int_a^b (\lambda f)(t)dt = -\int_b^a (\lambda f)(t)dt = -\int_b^a \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$

أي $I(\lambda f) = \lambda I(f)$

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

مثال ـ

$f$ و $g$ دالتان مستمرتان على المجال $[2\,,7]$ إذا علمت أن:

$I = \int_2^3 f(x)dx = -5$ و $J = \int_7^3 f(x)dx = 3$ و $K = \int_2^7 g(x)dx = 13$

1) احسب $L=\int_2^7 f(x)dx$ و $M=\int_2^7 (f+g)(x)dx$ و

$N=\int_2^7 (4f(x)-5g(x))\,dx$

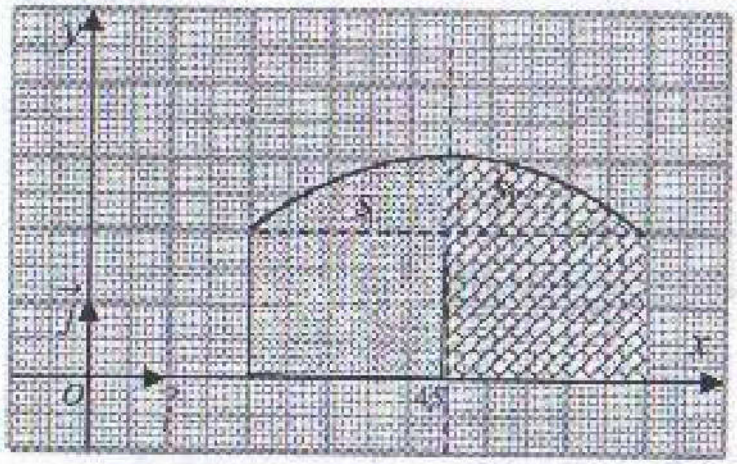
ب) نفرض أن $g(x)>0$ على المجال $[2,7]$ و المنحنى البياني لـ $g$ متناظر بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $x=\frac{9}{2}$. احسب $\int_2^{4,5} g(x)dx$.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

✓ الحل

1) $L=\int_2^7 f(x)dx=\int_2^3 f(x)dx+\int_3^7 f(x)dx=\int_2^3 f(x)dx-\int_7^3 f(x)dx=I-J=-8$

$M=\int_2^7 (f+g)(x)dx=\int_2^7 f(x)dx+\int_2^7 g(x)dx=L+K=-8+13=5$




$N=\int_2^7 4f(x)dx-\int_2^7 5g(x)dx$

$=4\times L-5K=-32-65=-97$

ب) $S_1=\int_2^{4,5} g(x)dx$

$S_2=\int_{4,5}^7 g(x)dx$

بما ان التحني الممثل للدالة $g$ متناظر بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $x=4,5$

فإن $S_1=S_2$ و $S_1+S_2=13$ و منه $S_1=\frac{13}{2}$

## 2 - 4 إشارة التكامل و المقارنة

مبرهنة

$f$ و $g$ دالتان مستمرتان على مجال $I$، و ليكن $a$ و $b$ عددين حقيقيين من $I$.

1) إذا كان $a\le b$ و $f\ge 0$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(t)dt\ge 0$.

2) إذا كان $a\le b$ و $f\ge g$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(t)dt\ge\int_a^b g(t)dt$.

الإثبات

1) رأينا في ما سبق أنه إذا كانت $f$ موجبة على $[a,b]$ فإن $I(f)$ يمثل المساحة و بالتالي فهو موجب إذن $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ .

2) من الفرض $f \geq g$ نستنتج أن $f-g \geq 0$ على المجال $[a,b]$ وعليه $I(f-g) \geq 0$ لكن $I(f-g) = I(f)-I(g)$.

إذن $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \geq 0$

ومنه نستنتج $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ .

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

مثال ـ ◆

عين إشارة التكامل $I = \int_0^1 (x^2-1)dx$ و $J = \int_1^2 (x^2-1)dx$

✓ الحل

لتعيين إشارة $I$ نعين إشارة الدالة $f$ المعرفة على $[0,2]$ بـ $f(x) = x^2-1$

- إذا كان $x \in [0,1]$ فإن $f(x) \leq 0$ إذن $-f(x) \geq 0$ وحسب الخطية $\int_0^1 -f(x)dx \geq 0$

$\int_0^1 -f(x)dx = -\int_0^1 f(x)dx$ وعليه نستنتج $\int_0^1 f(x)dx \leq 0$

- إذا كان $x \in [1,2]$ فإن $f(x) \geq 0$ ومنه $\int_1^2 f(x)dx \geq 0$ .

## 5-2 القيمة المتوسطة لدالة - حصر القيمة المتوسطة

مبرهنة ❶

$f$ دالة مستمرة على مجال $I$ ، و ليكن $a$ و $b$ عددين حقيقيين مختلفين من $I$ ، عندئذ يوجد عدد حقيقي $c$ محصور بين $a$ و $b$ بحيث $\int_a^b f(t)dt = (b-a)f(c)$ .

العدد $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة $f$ بين $a$ و $b$

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

**الإثبات**

نفرض أن الدالة $f$ متزايدة.

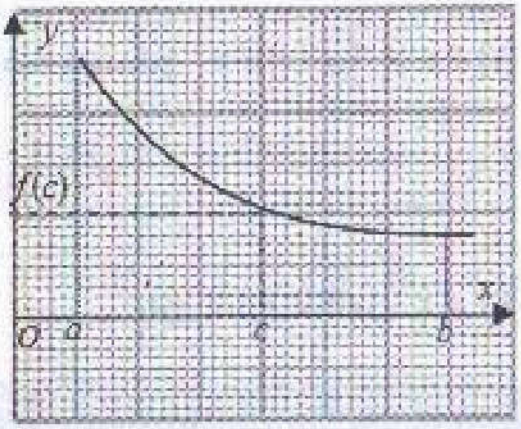
**الحالة الأولى** $a < b$

- بما أن $f$ متزايدة فإنه من أجل كل $x$ من $[a,b]$ فإن $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$

ومنه نستنتج $f(a)(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f(b)(b-a)$

وبما أن $b-a > 0$ نجد $f(a) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq f(b)$.

- بما أن $f$ متزايدة ومستمرة على $[a,b]$ فإنه يوجد عدد حقيقي $c$ من $[a,b]$ بحيث $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.




**الحالة الثانية** $a > b$

لدينا في هذه الحالة $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

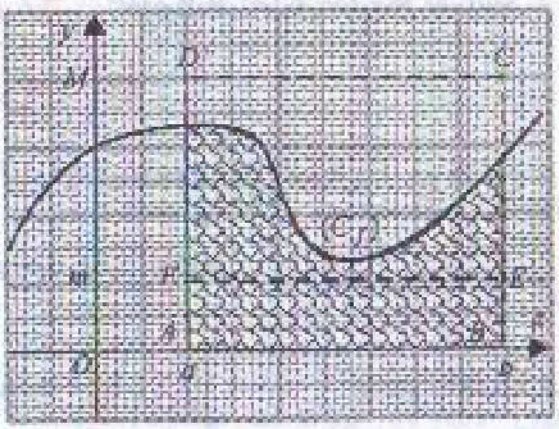
و بما أن $b < a$ فإنه يوجد $c$ محصور بين $a$ و $b$ بحيث $\int_b^a f(x)dx = (a-b)f(c)$

ومنه $\int_a^b f(x)dx = -(a-b)f(c)$ أي $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)$

**مبرهنة ❷**

$f$ دالة مستمرة على مجال $I$، و ليكن $m$ و $M$ عددين حقيقيين مختلفين، و ليكن ايضا $a$ و $b$ عددين حقيقيين من $I$ بحيث $a \leq b$.

إذا كانت $m \leq f(x) \leq M$ على المجال $[a,b]$ فإن $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$




**الإثبات**

من أجل كل $x$ من $[a,b]$ لدينا،

$m \leq f(x) \leq M$ .... (1)

الدالتان $x \mapsto m$ و $x \mapsto M$ ثابتتان على $[a,b]$

إذن $\int_a^b M\,dt = M(b-a)$ و $\int_a^b m\,dt = m(b-a)$

وبما أن $a \leq b$ و بتكامل المتباينة (1) نحصل على

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

بالقسمة على $(b-a)$ نجد $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$.

## نتيجة

$f$ دالة مستمرة على مجال $I$ و ليكن $a$ و $b$ عددين كيفيين من $I$
وليكن $M$ عدد حقيقي موجب.
إذا كانت $|f(x)| \le M$ على $[a,b]$ أو $[b,a]$
فإن $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le M|b-a|$

### مبرهنة

1) $f$ دالة مستمرة و سالبة على المجال $[a,b]$ عندئذ $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b |f(x)|dx$

2) إذا كانت $f$ تنعدم عند $c$ من $[a,b]$ و $f(x)$ سالبة على $[a,c]$ وموجبة على $[c,b]$
فإن $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^c |f(x)|dx + \int_c^b f(x)dx$

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

### الإثبات

1) نضع $f(x) = -g(x)$ حيث $g(x)$ موجبة

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b -g(x)dx = -\int_a^b g(x)dx = -\int_a^b |f(x)|dx$$

(لأن $g(x) = -f(x) = |f(x)|$)

2) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = -\int_a^c |f(x)|dx + \int_c^b f(x)dx$

### ملاحظة

1) إذا كانت $f$ سالبة على مجال $I$ فإن تكامل $f$ على $I$ هو نظير مساحة حيز من المستوي فوق المنحني الممثل للدالة $f$.

2) إذا غيرت $f$ إشارتها على $I$ نجزئ المجال $I$ إلى مجالات جزئية بحيث الدالة $f$ لها إشارة ثابتة على كل منها ثم نجمع التكاملات المحسوبة على كل مجال.

## تمرين تدريبي ❶

بين أن 1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt \le \frac{\pi}{2}$ ؛ 2) $0 \le \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx \le 2$

✓ الحل

في الحالتين أن الدالتين المعطاة مستمرتان على $\mathbb{R}$ إذن فهما قابلتان للمكاملة على مجال التكامل.

1) من أجل كل $t$ من $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ يكون $0 \le \cos t \le 1$

إذن $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt$ لكن $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt = 1\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \frac{\pi}{2}$

إذن $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt \le \frac{\pi}{2}$

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

2) بما أن $0 \le x \le 1$ فإن $2x \le 2$ ومنه $0 \le \frac{2x}{x^2+1} \le 2x \le 2$

$0 \le \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx \le \int_0^1 2\,dx$

لكن $\int_0^1 2\,dx = 2(1-0) = 2$ إذن $0 \le \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx \le 2$.

## تمرين تدريبي ❷

$f$ دالة معرفة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x-1$ و $(d)$ تمثيله البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) احسب التكامل $I = \int_0^2 f(x)dx$ ثم احسب القيمة المتوسطة لـ $f$ على $[0,2]$.

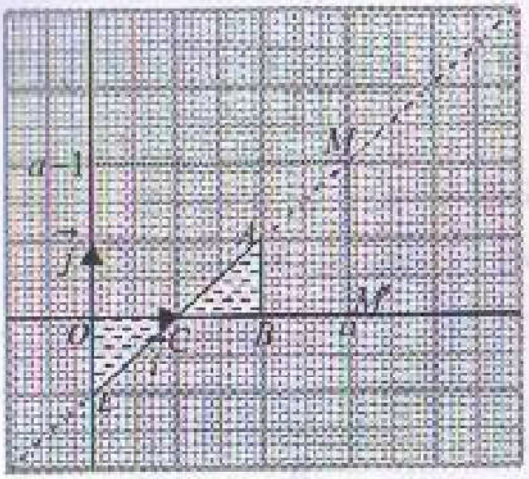
ب) ليكن $a$ عددا حقيقيا بحيث $a > 2$ و $M$ نقطة من $(d)$ ذات الفاصلة $a$.

احسب $S(a) = \int_2^a f(x)dx$ ثم قارن بين $f(a)$ و $S'(a)$.

✓ الحل

1) $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM




بما أن $f$ سالبة على المجال $[0\ ,\ 1]$

فإن $\int_0^1 f(x)\,dx$

هو نظير مساحة المثلث $OEC$ التي تساوي $\frac{1}{2}$

ومنه $\int_0^1 f(x)\,dx = -\frac{1}{2}$

بما أن $f$ موجبة على $[1\ ,\ 2]$ فإن $\int_1^2 f(x)\,dx$

هي مساحة المثلث $ACB$ و التي تساوي 1

ومنه $\int_1^2 f(x)\,dx = 1$ إذن $I = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

القيمة المتوسطة للدالة $f$ على المجال $[0\ ,\ 2]$ هي $M$ حيث

$$M = \frac{1}{b-a}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

ب) بما أن $f$ موجبة على $[2\ ,\ a]$ فإن $\int_2^a f(x)\,dx$ يساوي مساحة شبه المنحرف $AMBM'$

والتي تساوي $\frac{[(a-1)+1](a-2)}{2}$ اي $\frac{a(a-2)}{2}$

إذن $S(a) = \int_2^a f(x)\,dx = \frac{a(a-2)}{2}$

الدالة $S$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $S'(a) = a-1 = f(a)$.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

عن موقع www.eddirasa.com
البريد الإلكتروني: info@eddirasa.com