مستوى : ثالثة ثانوي | دارالشيوخ / ولاية الجلفة | إعداد الأستاذ : جيوخ العربي

ملخص شامل في المتتاليات العددية

السنة الدراسية : 2021-2020

1. تعريف المتتالية :

لتكن $\mathcal{E}$ مجموعة غير خالية. نسمّي متتالية في $\mathcal{E}$ كل تطبيق u منطلقه مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ (أو جزء من $\mathbb{N}$) ومستقره $\mathcal{E}$. ونكتب :

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{E}$$

$$n \longmapsto u(n) = u_n$$

↩ نرمز عادة لهذه المتتالية بـ : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو (u_n) اختصاراً.

يدعى العنصر u_n بالحد العام للمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

↩ إذا كانت $\mathcal{E} = \mathbb{R}$ عندئذ نسمي المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بالمتتالية العدديّة. إنّها الحالة التي سندرسها طوال هذا الفصل.

2. المتتالية المحدودة :

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عدديّة.

1. نقول عن متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إنّها محدودة من الأعلى إذا كانت مجموعة قيمها كذلك، أي :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq \alpha$$

2. نقول عن متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إنّها محدودة من الأسفل إذا كانت مجموعة قيمها كذلك، أي :

$$\exists \beta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq \beta$$

3. نقول عن متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إنّها محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأسفل، أي :

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N} : |u_n| \leq \gamma$$

3. المتتالية الرتيبة :

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عدديّة.

1. نقول عن متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إنّها متزايدة إذا حقّقت الشرط التالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \geq u_n$$

إذا كانت المتباينة تامة نقول عندئذ أنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إنّها متزايدة تماما.

2. نقول عن متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إنّها متناقصّة إذا حقّقت الشرط التالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \leq u_n$$

إذا كانت المتباينة تامة نقول عندئذ أنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إنّها متناقصّة تماما.

ملاحظة هامّة :

1. كل متتالية رتيبة إبتداء من رتبة معيّنة تكون رتيبة.
2. أحيانا دراسة إشارة الفرق لا تكون سهلة فنلجأ إلى فكرة ثانية.

إذا كانت المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ذات حدود موجبة لدراسة رتابتها يمكن مقارنة النسبة التالية $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مع 1.

- إذا كان : $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ كانت المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة تماما.
- إذا كان : $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ كانت المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصّة تماما.
- إذا كان : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ كانت المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ثابتة.

4. طبيعة المتتالية :

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عدديّة. إذا وُجِدَ عدد l يحقّق الشرط $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ فإنّ هذا العدد وحيدٌ ونسمّيه نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ونقول إنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب من l أو نقول إنّها متقاربة ونهايتها l.

أمّا إذا لم تتقارب متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ فنقول إنّها متباعدة. إنّ تعيين طبيعة متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ يعني دراسة تقاربها أو تباعدها.

مبرهنة :

1. إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فإنّها متقاربة.
2. إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متناقصّة ومحدودة من الأسفل

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

فإنّها متقاربة.

فكرة جميلة :

لإثبات أنّ متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة من الأسفل بعدد حقيقي $\mathcal{D}$ (أو محدودة من الأعلى بعدد $\mathcal{G}$) يمكن إتّباع إحدى الطرق الآتيّة :

- استعمال الاستدلال بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا : $u_n \geq \mathcal{D}$ (أو لإثبات $u_n \leq \mathcal{G}$).
- يمكن تأجيل البرهان بالتراجع في هذه الفقرة إلى قراءة ثانية.
- المقارنة بين u_n و $\mathcal{D}$ (أو u_n و $\mathcal{G}$) بدراسة إشارة الفرق $u_n - \mathcal{D}$ (أو $u_n - \mathcal{G}$).
- إذا كانت $u_n = f(n)$ ندرس تغيّرات الدالة f على المجال $[0, +\infty[$.

مبرهنة :

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين متقاربتين، ولنضع : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$.

1. إنّ المتتالية $(u_n + \lambda v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من $l + \lambda l'$ مهما كان العدد λ من $\mathbb{R}$.
2. إنّ المتتالية $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من $|l|$.
3. بافتراض أنّ $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq v_n$ يكون $l \leq l'$.
4. إنّ المتتالية $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من $l.l'$.
5. بافتراض أنّ $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \neq 0$ وأنّ : $l \neq 0$ تكون المتتالية $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من $\frac{1}{l}$.
6. إذا كانت $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية جزئية من المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ فإنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = l$.

ملاحظة هامّة :

لا تبقى الخاصيّة 3. صحيحة إذا استبدلنا بالمتراجحة $\leq$ متراجحة تامّة $<$. فعلى سبيل المثال إذا تأمّلنا المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفتين بالعلاقتين:

$$u_n = \frac{n}{n+1} \quad \text{و} \quad v_n = \frac{n+2}{n+1}$$

وجدنا أنّ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$$

ومع ذلك فإنّ :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = 1$$

مبرهنة :

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين حقيقيّتين.

1. إنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ إذا وفقط إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} (-u_n) = -\infty$.
2. إذا كان $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$ كان $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$.
3. إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة وكانت $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.
4. إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تحقق الشرط $u_n \geq \alpha > 0$ مهما كان العدد $n \leq n_1$، وكان $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$.
5. إذا كان $v_n \leq u_n$ مهما كان العدد $n \leq n_1$، وكان $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

مبرهنة وتعريف :

نقول إنّ المتتاليتين الحقيقيّتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متجاورتان إذا تحققت الشروط :

- المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة والمتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة.
- تتقارب المتتالية $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من 0.

إنّ أي متتاليتين متجاورتين متقاربتان ولهما النهاية نفسها.

مثال أوّل : المتتاليتان $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ متجاورتان. فعلا :

المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متزايدة، لأنّ :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متناقصة، لأنّ :

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - u_n + \frac{1}{n!} = \frac{1-n}{(n+1)!} \leq 0$$

وكذلك لدينا :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{n!}\right) = 0$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

مثال ثان : من السهل أن نثبت أنّ المتتاليتين $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ و $(\beta_n)_{n\geq 1}$ المعرّفتين كما يأتي :

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2021}} \quad \text{و} \quad \beta_n = \alpha_n + \frac{1}{2020n^{2020}}$$

أنّهما متجاورتان.

مبرهنة :

لتكن المتتاليات الحقيقيّة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نفترض أنّ :

- المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تسعيان إلى العنصر α من $\overline{\mathbb{R}}$[1].
- من أجل كل n من $\mathbb{N}$، لدينا : $u_n \leq v_n \leq w_n$.

حينئذ يكون $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \alpha$.

مثال مهم :

لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عدديّة معرّفة ب: $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n^3+k}$.

لدينا :

$$\forall k \in \{1,2,...,n\} : \frac{n}{n^3+n} \leq \frac{n}{n^3+k} \leq \frac{n}{n^3+1}$$

بأخذ المجموع نجد :

$$\frac{n^2}{n^3+n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^3+k} \leq \frac{n^2}{n^3+1}$$

بما أنّ :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^3+n} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^3+1} = 0$$

عملاً بمقتضى مبرهنة السابقة، نجد أنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

4. المتتاليات التراجعيّة (أو التدريجيّة)

تعريف :

نسمّي متتالية تراجعيّة كلّ متتالية يعطى حدها من الرتبة $n+1$ بدلالة حد أو عدة حدود من الرتبة أقل من $n+1$. ويمكن التعبير عن مثل هذه المتتاليات العدديّة عندما يكون الحد من الرتبة $n+1$ معطى بدلالة الرتبة n على النحو التالي :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathcal{B} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

مع $\mathcal{B}$ جزء من $\mathbb{R}$ و $f : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ دالة.

سنناقش الحالتين التاليتين : 1. إذا كانت الدالة f متزايدة فإنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ رتيبة. هنا نميّز حالتين وهما :

- متزايدة إذا كان $u_0 \leq u_1$.
- متناقصة إذا كان $u_1 \leq u_0$.

2. إذا كانت الدالة f متناقصة فإنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ليست رتيبة، المتتاليتان الجزئيّتين الأساسيتان رتيبتان. نميّز حالتين وهما :

- إذا كان $u_0 \leq u_2$ كانت $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة و $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة.
- إذا كان $u_2 \leq u_0$ كانت $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة.

ملاحظة هامّة :

إذا كانت f دالة مستمرة و $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نحو العدد الحقيقي l فإنّ l يحقّق العلاقة : $f(l) = l$.

أيّ أنّ النهاية l تنتمي إلى مجموعة النقاط الصامدة ل f.

تفيد هذه الملاحظة أنّ البحث عن l يعود إلى حل المعادلة $f(l) = l$، إنّ هذه المعادلة تقدم النهايات الممكنة للمتتالية. فعليه إنّ لم تقبل هذه المعادلة حلولا، فإنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ غير متقاربة. وبالعكس، إذا قبلت المعادلة حلولا عدّة، فإنّ المسألة تعود إلى النظر في إمكانية تمتّع المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ باحداها نهاية لها.

وقد يمكن للمعادلة أنّ تقبل حلولا دون أنّ تكون المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.

5. المتتالية الحسابية :

نقول أنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية، إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي r بحيث يكون من أجل كل عدد طبيعي n يتحقّق إحدى العلاقتين:

- $u_{n+1} - u_n = r$. - $u_{n+1} = u_n + r$.

↩ العدد الحقيقي r يسمى أساس هذه المتتالية.

↩ u_0 يسمى الحد الأوّل لهذه المتتالية.

ملاحظتان :

1. تكون المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حسابية إذا وفقط إذا كان الفرق بين

[1] $\overline{\mathbb{R}} =]-\infty,+\infty[\cup \{-\infty,+\infty\}$

حدين متتابعين ثابتا وهذه النسبة الثابتة تسمّلا الأساس المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. كل متتالية حسابية تكون معرّفة بعددها الأوّل وأساسها أو بحدّها و أساسها.

خاصية مميّزة :

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ حسابية ذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n العلاقة الموالية :

$$u_n=\frac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}$$

وهذا ما يكافئ : $\forall n\in\mathbb{N}^* : 2u_n=u_{n-1}+u_{n+1}$.

الآن نسمّي هذ الأخير بالقانون الوسيط الحسابي.

ملاحظة مهمّة :

تكون الأعداد α ، β و γ في هذا الترتيب ثلاث حدود لمتتالية حسابية إذا وفقط إذا كان $\alpha+\gamma=2\beta$.

الحد العام لمتتالية حسابية :

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها r وحدّها الأوّل u_0. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n العلاقة التالية : $u_n=u_0+nr$.

ملاحظة مهمّة :

إذا كان الحد الأوّل هو u_1، يكون لدينا : $u_n=u_1+(n-1)r$.

بصفة عامّة : إذا كان u_m و u_n حدين من متتالية حسابية أساسها r، فإنّ : $u_n=u_m+(n-m)r$ (ترتيب m و n غير مهم).

اتّجاه تغيّر متتالية حسابيّة :

لنفترض جدلاً أنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابيّة. فإنّ اتّجاه تغيّر متتالية حسابيّة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ يتبع إشارة أساسها r، بعبارة أخرى نميّز ثلاث حالات وهي :

1. إذا كان $r>0$، فإنّ المتتاليّة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة.
2. إذا كان $r<0$، فإنّ المتتاليّة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة.
3. إذا كان $r=0$، فإنّ المتتاليّة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ثابتة.

مجموع حدود متتابعة متتالية حسابيّة :

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابيّة أساسها r وحدّها الأوّل u_0.

لدينا : $\mathcal{S}_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n=\frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$

- u_0 الحد الأوّل للمجموع $\mathcal{S}_n$.
- u_n الحد الأخير للمجموع $\mathcal{S}_n$.
- $(n+1)$ عدد حدود المجموع $\mathcal{S}_n$.

ملاحظتان :

1. لدينا : $u_1+u_2+...+u_n=\frac{n(u_1+u_n)}{2}$.
2. ليكن m عدد طبيعي، يكون لدينا :

$$u_m+u_{m+1}+...+u_n=\frac{(n-m+1)(u_m+u_n)}{2}$$

5. المتتالية الهندسيّة :

نقول إنّ المتتاليّة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسيّة إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي وليكن q بحيث، من أجل كل عدد طبيعي n يحقّق إحدى العلاقتين :

$$u_{n+1}=qu_n \quad \text{أو} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n}=q$$

- نسمّي q أساس المتتاليّة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ملاحظات :

1. تكون متتاليّة التي حدودها غير منعدمة هندسيّة إذا وفقط إذا كان حاصل قسمة حدين متتابعين ثابت.
2. تكون المتتاليّة هندسيّة معرّفة بأحد حدودها وأساسها.
3. إذا كان $u_0=0$ فإنّه من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا $u_n=0$.
4. إذا كان $q=0$ فإنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، يكون لدينا $u_n=0$.
5. إذا كان $q=1$ فإنّه من أجل كل عدد طبيعي n، يكون لدينا $u_n=u_0$.

خاصيّة مميّزة :

تكون المتتاليّة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ هندسيّة إذا وفقط إذا كان، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$u_{n+1}u_{n-1}=u_n^2$$

الآن نسمّي هذ الأخير بالقانون الوسيط الهندسي.

ملاحظة :

تكون الأعداد α ، β و γ في هذا الترتيب ثلاث حدود متتابعة لمتتاليّة هندسيّة إذا وفقط إذا كان : $\alpha\gamma=\beta^2$.

الحد العام لمتتاليّة هندسيّة :

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليّة هندسيّة أساسها العدد الحقيقي q

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

وحدّها الأوّل u_0. من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا :

$u_n = u_0 q^n$.

ملاحظة قيّمة :

إذا كان u_1 هو الحد الأوّل، يكون لدينا : $u_n = u_1 q^{n-1}$.

بصفة عامّة : إذا كان u_m و u_n حدين من متتاليّة هندسيّة أساسها q، فإنّ : $u_n = u_m q^{n-m}$ (ترتيب m و n غير مهم).

اتّجاه تغيّر متتاليّة هندسيّة :

لنفترض أنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليّة هندسيّة. الآن لنلخص اتّجاه تغيّر متتالية هندسيّة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ونرمز للأساس المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$، بالرمز q : ولنفترض أيضا $u_0 \neq 0$ (تم مناقشة حالة $u_0 = 0$ سابقاً) ولنناقش معاً الحالات التي تصادفنا :

1. إذا كان $q = 0$، من هذا الأخير نلزم بأنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ مستقرّة.
2. إذا كان $q < 0$، وهذا ما يوحي لنا بأنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ غير رتيبة.
3. إذا كان $q > 0$، فاتّجاه تغيّر المتتاليّة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ يتبع إشارة المقدار $u_0(q-1)$ في هذه الحالة سنناقش معا ثلاث حالات وهي :

- إذا كان $u_0(q-1) > 0$، هذا يلزم بأنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة.
- إذا كان $u_0(q-1) < 0$، هذا يلزم بأنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصّة.
- إذا كان $u_0(q-1) = 0$، هذا يلزم بأنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ثابتة.

مجموع حدود متتابعة لمتتاليّة هندسيّة :

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليّة هندسيّة أساسها q وحدّها الأوّل u_0.

$$\mathcal{S}_n = u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n = \begin{cases} u_0\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, si\ :\ q\neq 1 \\ (n+1)\,u_0, si\ :\ q=1 \end{cases}$$

$u_0 \hookleftarrow$: الحد الأوّل للمجموع $\mathcal{S}_n$.

$(n+1) \hookleftarrow$: عدد حدود المجموع $\mathcal{S}_n$.

ملاحظتان :

لنفترض أنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليّة هندسيّة أساسها $q \neq 1$.

1. لدينا دوما : $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_1\dfrac{1-q^n}{1-q}$.
2. ليكن m عدد طبيعي ويحقّق أيضا $m < n$، عندئذ يكون لدينا العلاقة التاليّة :

$$u_m + u_{m+1} + \cdots + u_n = u_m\frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$$

6. مبدأ الاستدلال بالتراجع :

مسلمة : $P(n)$ خاصيّة متعلقة بعدد طبيعي n.

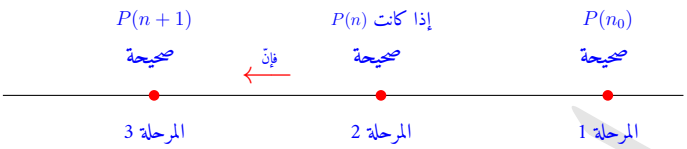
ليكن n_0 عدد طبيعي.

للبرهان على صحة الخاصيّة $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0، يكفي :

1. نتأكد من صحة الخاصيّة من أجل n_0 أي $P(n_0)$.
2. نفرض أنّ الخاصيّة صحيحة من أجل كل عدد طبيعي k أكبر من أو يساوي n_0 أي $P(k)$ (فرضية التراجع) ونبرهن صحة الخاصيّة من أجل $k+1$ أي $P(k+1)$.

ملاحظتان :

1. عند الانتهاء من المرحلتين نقر أنّ الخاصيّة صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.
2. نترجم الشرط الثاني بالقول أنّ الخاصيّة وراثية أي أنّها تنتقل من عدد طبيعي n إلى العدد الذي يتبعه $n+1$.
3. التأكد من صحة الخاصيّة من أجل n_0 ضروري جدا لأنّه يمكن أن تكون خاصيّة وراثية دون أن تكون صحيحة.



متى يُستعمل الاستدلال بالتراجع :

يمكن التفكير في استعمال الاستدلال بالتراجع على صحة خاصية متعلقة بمجموعة الأعداد الطبيعيّة.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

تداريب في المتتاليات العددية

تمرين رقم : 01

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة على النحو التالي : $\begin{cases} u_0=\alpha\ ,\ et\ \ u_1=\beta, \quad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \\ 3u_{n+1}=u_n+2u_{n-1}\ ,\ n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$.

1. أحسب القيمة العددية للحدين u_2 و u_3 بدلالة α و β.

2. من أجل كل عدد طبيعي n، نضع : $v_n=u_{n+1}-u_n$.

أ- أحسب الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بدلالة الفرق $(\beta-\alpha)$.

ب- بيّن أنّ المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هي متتالية هندسية أساسها $-\frac{2}{3}$.

ج- عيّن عبارة الحد العام للمتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بدلالة $(\beta-\alpha)$.

د- أحسب المجموع S_n بدلالة n، مع : $S_n=v_2+v_4+\cdots+v_{n-1}$.

3.أ- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، يكون لدينا : $u_n=u_0+v_0+v_1+S_n$.

ب- استنتج حينئذٍ عبارة u_n بدلالة n.

ج- أحسب النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

تمرين رقم : 02

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال: $\left[-1,\frac{7}{20}\right]$ كما يلي : $f(x)=-\frac{15}{126x-89}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة : $y=x$.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرّفة على بحدّها الأوّل $u_0=-1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1.أ- أنقل الشكل ثم مثّل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 و u_3 دون حسابها.

ب- ضع تخمينا حول إتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و تقاربها.

2.أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1\le u_n\le\frac{5}{18}$.

ب- بيّن أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة تماما.

3. لتكن المتتالية العددية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $v_n=1+\frac{19}{35-126u_n}$.

أ- برهن أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول v_0.

ب- أكتب عبارتي v_n و u_n بدلالة n، واستنتج النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

ج- من أجل كل عدد طبيعي n، نضع :

$$S_n=\frac{10}{10-36u_0}+\frac{10}{10-36u_1}+\cdots+\frac{10}{10-36u_{2021n}}$$

. أحسب S_n، ثمّ أوجد النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

تمرين رقم : 03

نعتبر المتتالية العددية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة بالصيغة التراجعية التالية : $\begin{cases} a_0=0\ ,\ et\ \ a_1=1 \\ a_{n+2}=\frac{2}{3}a_{n+1}-\frac{1}{9}a_n\ ,\ n\in\mathbb{N} \end{cases}$.

من أجل كل عدد طبيعي n، نعرّف المتتاليتين العدديتين $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفتين بالعلاقتين التاليتين :

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM