ملخصات البالك • شعب أدبية
المحور الأول • المتتاليات العددية

مفهوم المتتالية

1 تعريف

متتالية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n، أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطى، العدد $u(n)$ والذي نرمز له بالرمز u_n.

- نرمز للمتتالية u بـ (u_n).
- يسمى u_n الحد العام للمتتالية (u_n)، أو الحد الذي دليله n.
- رتبة الحد u_b باعتبار u_a هو الحد الأول للمتتالية (u_n) هي $b-a+1$.
- إذا كانت (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ فإنّ حدها الأول هو u_0، وإذا كانت معرفة على $\mathbb{N}^*$ فإنّ حدها الأول هو u_1.

2 طرق توليد متتالية

يمكن توليد متتالية عددية بإعطاء



عبارة الحد العام

مثال

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$u_n = 2n+5$$

- لحساب أي حد u_p يكفي تعويض p في عبارة الحد العام لـ (u_n).

$$u_0 = 2\times 0+5 = 5$$
$$u_1 = 2\times 1+5 = 7$$
$$u_{2021} = 2\times 2021+5 = 4047$$

علاقة تراجعية

مثال

لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$\begin{cases} v_0 = -3 \\ v_{n+1} = 4v_n - 1 \end{cases}$$

- لحساب أي حد v_p يجب معرفة الحد الذي قبله v_{p-1}.

$$v_1 = 4v_0 - 1 = 4(-3) - 1 = -13$$
$$v_2 = 4v_1 - 1 = 4(-13) - 1 = -53$$
$$v_3 = 4v_2 - 1 = 4(-53) - 1 = -213$$

اتجاه تغير متتالية عددية

لدراسة اتجاه تغير متتالية عددية (u_n) ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$

- $u_{n+1}-u_n<0$ ⟵ (u_n) متناقصة
- $u_{n+1}-u_n=0$ ⟵ (u_n) ثابتة
- $u_{n+1}-u_n>0$ ⟵ (u_n) متزايدة

ملاحظة: القول عن متتالية عددية (u_n) أنّها رتيبة معناه أنّها إما متزايدة وإما متناقصة

المتتالية الحسابية والمتتالية الهندسية

	المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
تعريف	نقول إنّ (u_n) متتالية حسابية إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي r بحيث من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=u_n+r$، يسمى r أساس المتتالية (u_n).	نقول إنّ (u_n) متتالية هندسية إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي q بحيث من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=u_n\times q$، يسمى q أساس المتتالية (u_n).
عبارة الحد العام	• (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ معناه: $u_n=u_0+nr$ • (u_n) معرفة على $\mathbb{N}^*$ معناه: $u_n=u_1+(n-1)r$ • في الحالة العامة: $u_n=u_p+(n-p)r$	• (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ معناه: $u_n=u_0\times q^n$ • (u_n) معرفة على $\mathbb{N}^*$ معناه: $u_n=u_1\times q^{n-1}$ • في الحالة العامة: $u_n=u_p\times q^{n-p}$
خاصية	a، b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية بحيث $a+c=2b$. b يسمى الوسط الحسابي للعددين a و c.	a، b و c ثلاثة حدود غير معدومة ومتعاقبة من متتالية هندسية بحيث $a\times c=b^2$. b يسمى الوسط الهندسي للعددين a و c.
اتجاه التغير	(u_n) متتالية حسابية أساسها r. لدينا: $u_{n+1}-u_n=r$. إذا كان $r<0$ فإن (u_n) متناقصة إذا كان $r=0$ فإن (u_n) ثابتة إذا كان $r>0$ فإن (u_n) متزايدة	(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها q. 1 إذا كان $q<0$ فإن (u_n) ليست رتيبة. 2 إذا كان $q=0$ فإن جميع حدود (u_n) معدومة ابتداء من الحد الثاني. 3 إذا كان $q>0$ ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$.

	$q>1$	$q=1$	$0<q<1$
$u_0<0$	(u_n) متناقصة	(u_n) ثابتة	(u_n) متزايدة
$u_0>0$	(u_n) متزايدة		(u_n) متناقصة

مجموع الحدود

المتتالية الحسابية

مجموع الحدود = $\frac{\text{عدد الحدود}}{2}$ (الحد الأخير + الحد الأول)

عدد الحدود = دليل الحد الأخير – دليل الحد الأول + 1

$$S_n = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)$$

المتتالية الهندسية

مجموع الحدود = $\frac{\text{الحد الأول}}{1 - \text{الأساس}}\left(1 - \text{الأساس}^{\text{عدد الحدود}}\right)$

عدد الحدود = دليل الحد الأخير – دليل الحد الأول + 1

$$S_n = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = \frac{u_p}{1-q}\left(1 - q^{n-p+1}\right) ; q \neq 1$$

المتتاليات التراجعية

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول u_1 و بالعلاقة $u_{n+1} = au_n + b$ حيث $a \neq 0$ و $b \neq 0$.

الحالة 1: $a = 1$	الحالة 2: $a \neq 1$ و $u_0 = \frac{b}{1-a}$	الحالة 3: $a \neq 1$ و $u_0 \neq \frac{b}{1-a}$
طبيعة المتتالية		
(u_n) متتالية حسابية أساسها $r = b$	(u_n) متتالية ثابتة أي: $u_{n+1} = u_n = \ldots = u_0 = \frac{b}{1-a}$	لدراسة المتتالية التراجعية (u_n) نستعين بالمتتالية (v_n) ذات الحد العام $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$
مثال تطبيقي		
(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$ • بما أن $u_{n+1} - u_n = -3$ فإن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = -3$ وحدّها الأول $u_1 = 2$. • عبارة الحد العام: $u_n = u_1 + (n-1)r = -3n + 5$ • المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{n+1-1}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n(7-3n)}{2}$	(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$ • بحساب الحدود الأولى نجد: $u_2 = -3$ ، $u_3 = -3$ ، $u_4 = -3$ ... • باستعمال البرهان بالتراجع يمكن إثبات أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = -3$. ((u_n) ثابتة). • المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = nu_1 = -3n$	(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$ لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدّها العام: $v_n = u_n + 3$. • (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدّها الأول $v_1 = 4$. • من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 2^{n+1}$ • ومنه لكل n من $\mathbb{N}^*$: $u_n = v_n - 3 = 2^{n+1} - 3$ • المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = v_1 - 3 + v_2 - 3 + \ldots + v_n - 3 = 4(2^n - 1) - 3n$

تكرار المحاولة يهوّن كل صعب
والإرادة في النجاح تشق كل درب

