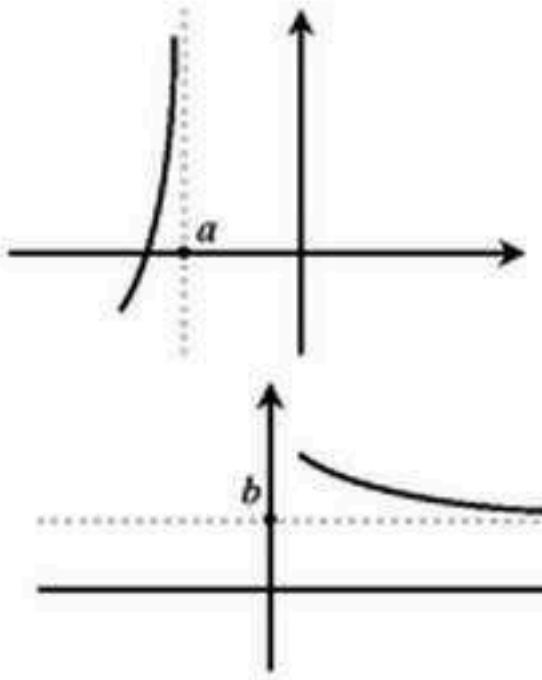
إعداد: عبد المطلب

دراسة الفروع اللانهائية

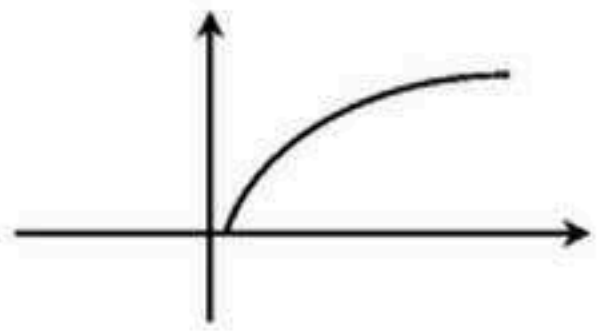


إذا كان $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ (المنحنى $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا يوازي $(O\ ،\ \vec{j})$ معادلته $x = a$)

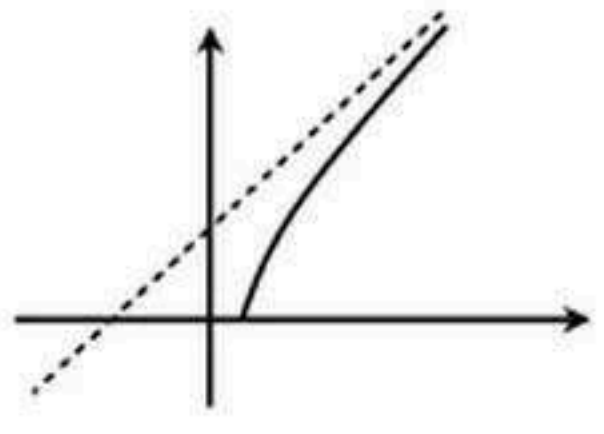
إذا كان $\lim_{x\to \infty} f(x) = b$ (المنحنى $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا يوازي $(O\ ،\ \vec{i})$ معادلته $y = b$)

إذا كان $\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$ (يُحتمل أن يقبل المنحنى $(\mathscr{C})$ مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y = ax + b$ ، لذلك نحسب $\lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x}$)

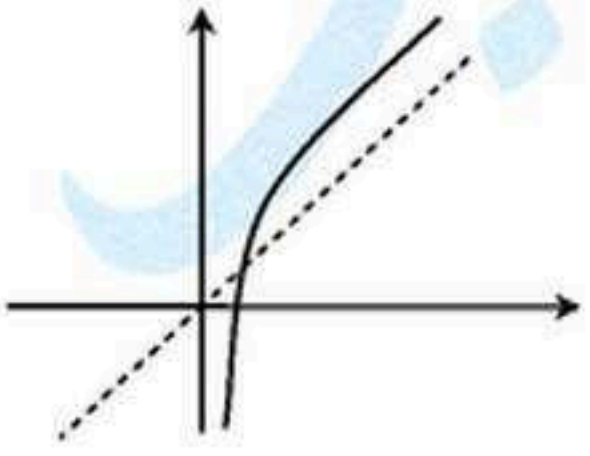
- $\lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ ← فرع قطع مكافئ باتجاه $(o\ ،\ \vec{i})$



- $\lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ← نحسب $\lim_{x\to \infty} [f(x) - ax]$
  - $\lim_{x\to \infty} [f(x) - ax] = b$ ← مستقيم مقارب مائل معادلته $y = ax + b$

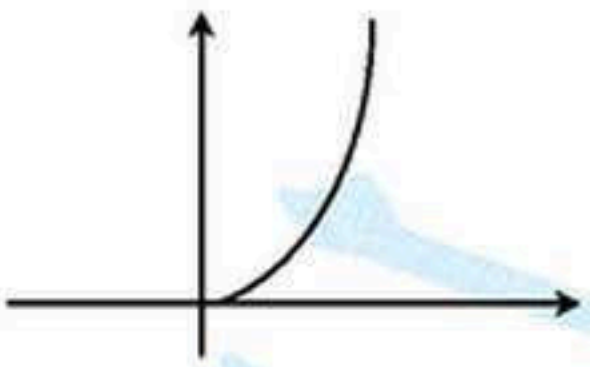


  - $\lim_{x\to \infty} [f(x) - ax] = \infty$ ← فرع قطع مكافئ باتجاه $y = ax$



  - $\lim_{x\to \infty} [f(x) - ax - b] = 0$ ← مستقيم مقارب مائل $y = ax + b$

- $\lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ ← فرع قطع مكافئ باتجاه $(o\ ،\ \vec{j})$



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الدالة الأسية

تعريف:

الدالة الوحيدة f حيث $f'=f$ و $f(0)=1$ هي: $\boxed{f(x)=e^x}$ حيث $e\approx 2{,}718$

خواص: x و y عددان حقيقان و n عدد صحيح:

$$e^{nx}=(e^x)^n \qquad e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y} \qquad e^{x+y}=e^x.e^y$$

$$e^{-x}=\frac{1}{e^x}>0 \qquad e^{-1}=\frac{1}{e} \qquad e^0=1$$

$\boxed{e^x=a \text{ يكافئ } x=\ln a \quad (a>0) \text{ و } e^{\ln a}=a}$ ($\ln$ يرمز إلى اللوغاريتم النيبري)

مثال: $e^{-\ln 2}=\frac{1}{e^{\ln 2}}=\frac{1}{2}$ و $e^{3\ln 2}=(e^{\ln 2})^3=8$

المشتق:

$\boxed{[e^{u(x)}]'=u'(x).e^{u(x)}}$ مثال: $(e^{2x})'=2e^{2x}$

النهايات:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \qquad \lim_{x\to -\infty}e^x=0^+ \qquad \lim_{x\to +\infty}e^x=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty \text{ و } \lim_{x\to -\infty}xe^x=0^- \quad \text{(التزايد المقارن)}$$

كذلك: $\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty \qquad \lim_{x\to -\infty}x^\alpha e^x=0 \quad (\alpha>0)$

الدالة اللوغاريتمية

تعريف: الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة $\frac{1}{x}$ حيث $f(1)=0$

هي: $\boxed{f(x)=\ln x}$ $\boxed{\ln x=y \text{ يكافئ } x=e^y \quad (x>0) \text{ و } y \text{ عدد حقيقي}}$

إشارة $\ln x$: • $\ln x>0$ إذا كان $x>1$ • $\ln x<0$ إذا كان $0<x<1$

• $\ln x=0$ إذا كان $x=1$ $(\ln 1=0)$ $\ln x=1$ إذا كان $x=e$ $(\ln e=1)$

خواص: a و b عددان حقيقان موجبان تماما، n عدد ناطق: $\boxed{\ln a=\ln b \text{ يكافئ } a=b}$

$$\ln a^n=n\ln a \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b \qquad \ln(a\times b)=\ln a+\ln b$$

نتائج: $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$ و $\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}\ln a$

المشتق: $\boxed{[\ln u(x)]'=\frac{u'(x)}{u(x)}}$ حيث u موجبة تماما وقابلة للاشتقاق

النهايات:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty \qquad \lim_{x\to +\infty}\ln x=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=0 \text{ و } \lim_{x\to 0^+}x\ln x=0 \quad \text{(التزايد المقارن)}$$

كذلك: $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0 \qquad \lim_{x\to 0^+}x^\alpha\ln x=0 \quad (\alpha>0) \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الدوال المرجعية

$y = x^2$

$y = x$

$y = \frac{1}{x}$

$y = x^3$

$y = e^x$

$y = \sqrt{x}$

$y = \sin x$

$y = \ln x$

$f(x) = x^2$

$g(x) = f(x-2) + 1$

$g(x) = (x-2)^2 + 1$

(C_f)

(C_g)

$y = \cos x$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الجداء السلّمي

تذكير:

في معلم متعامد ومتجانس من الفضاء، لتكن: $A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$

مركبة الشعاع $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$

طويلة الشعاع $\overrightarrow{AB}$: $\|\overrightarrow{AB}\|=AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

منتصف القطعة $[AB]$: $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

حجم رباعي الوجوه: $\boxed{\mathcal{V}=\frac{1}{3}S.H}$ حيث S مساحة القاعدة و H الارتفاع

الجداء السلمي:

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان حيث: $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$

$\boxed{\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'}$ $\boxed{\vec{u}.\vec{v}=u.v.\cos(\vec{u},\vec{v})}$

التعامد: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان إذا كان: $\vec{u}.\vec{v}=0$

الارتباط الخطي: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا إذا كان: $\vec{u}=\lambda\vec{v}$ (λ عدد حقيقي)

- $\mathcal{P}$ و $\mathcal{P}'$ مستويان، $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ ناظميان لهما على الترتيب:

$\mathcal{P}$ يوازي $\mathcal{P}'$ إذا كان: $\vec{n}=\lambda\vec{n}'$ (λ عدد حقيقي)

$\mathcal{P}$ يعامد $\mathcal{P}'$ إذا كان: $\vec{n}.\vec{n}'=0$

المستقيم AB عمودي على $\mathcal{P}$ إذا كان: $\overrightarrow{AB}=\lambda\vec{n}$

- بعد نقطة $A(x_A;y_A;z_A)$ عن مستوٍ $\mathcal{P}: ax+by+cz+d=0$ هو:

$$\boxed{d=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

مجموعة النقط في الفضاء

(E_1) $\boxed{MA=r}$

مجموعة النقط (E_1) هي: سطح كرة مركزها A ونصف قطرها r

معادلتها: $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=r^2$

(E_2) $\boxed{MA=MB}$

مجموعة النقط (E_2) هي: المستوي محور القطعة $[AB]$

(E_3) $\boxed{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}=0}$

مجموعة النقط (E_3) هي: المستوي شعاعه الناظمي $\overrightarrow{BC}$ ويشمل النقطة A

(E_4) $\boxed{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0}$

مجموعة النقط (E_4) هي: سطح كرة قطرها $[AB]$

المرجح:

لتكن G مرجح الجملة: $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ حيث: $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}}$$

$$G\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma};\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma};\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$$

لما $\alpha=\beta=\gamma$ النقطة G تمثل مركز ثقل المثلث ABC.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الأعداد المركبة $[\mathbb{C}]$

الشكل الجبري:

$\boxed{z = x + iy}$ حيث $\boxed{i^2 = -1}$ x و y عددين حقيقيين

$x = \mathrm{Re}(z)$: الجزء الحقيقي و $y = \mathrm{Im}(z)$: الجزء التخيلي

$z = 0$: $x = 0$ و $y = 0$ $\quad$ $z = z'$: $x = x'$ و $y = y'$ حيث $z' = x' + iy'$

مرافق عدد مركب:

$\boxed{\bar{z} = x - iy}$ $\quad$ $z.\bar{z} = x^2 + y^2$ و $z + \bar{z} = 2x$

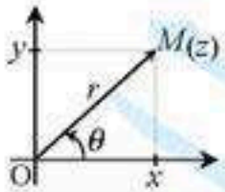
z حقيقي: $\bar{z} = z$ $\quad$ z تخيلي صرف: $\bar{z} = -z$

طويلة عدد مركب:

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$ ، $|z^n| = |z|^n$ ، $|z.z'| = |z| \times |z'|$ ، $|z|^2 = z \times \bar{z}$ ، $|\bar{z}| = |z|$

الشكل المثلثي:



$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$

طويلة z: $|z| = r$

عمدة z: $\arg(z) = \theta + 2k\pi$ $\quad$ $z \neq 0$ و k عدد صحيح

$\arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z')$ $\quad$ $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$

$\arg(z^n) = n\arg(z)$ n عدد صحيح $\quad$ $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

قانون موافر $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

الشكل الأسي:

$\boxed{z = re^{i\theta}}$ ، $\bar{z} = re^{-i\theta}$ ، $e^{i\pi} = -1$

$$\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta} \quad ، \quad \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} \times e^{i(\theta - \theta')} \quad ، \quad z.z' = r.r' \times e^{i(\theta + \theta')}$$

التفسير الهندسي للأعداد المركبة

- لاحقة $\overrightarrow{AB}$ هي $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ $\quad$ • طول $\overrightarrow{AB}$ هو $AB = |z_B - z_A|$
- لاحقة النقطة I منتصف $[AB]$ هي $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

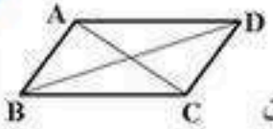
لاحقة G مرجح الجملة: $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ $\quad$ $\boxed{z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}}$

$\boxed{\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)}$ و $\boxed{\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{AC}{AB}}$

إذا كان $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ عددا حقيقيا فإن النقاط A ، B و C على استقامة واحدة.

إذا كان $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ عددا تخيليا صرفا فإن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متعامدان.

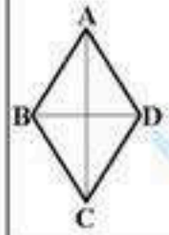
متوازي الأضلاع:



$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

أو القطران متناصفان

المعين:



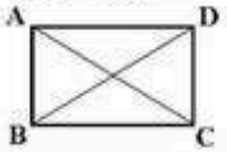
$AD = DC$ و $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

أو القطران متناصفان ومتعامدان

المستطيل:

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}$ و $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

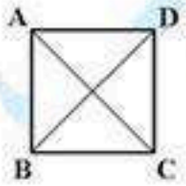
أو القطران متناصفان ومتساويان



المربع:

$AD = DC$ و $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

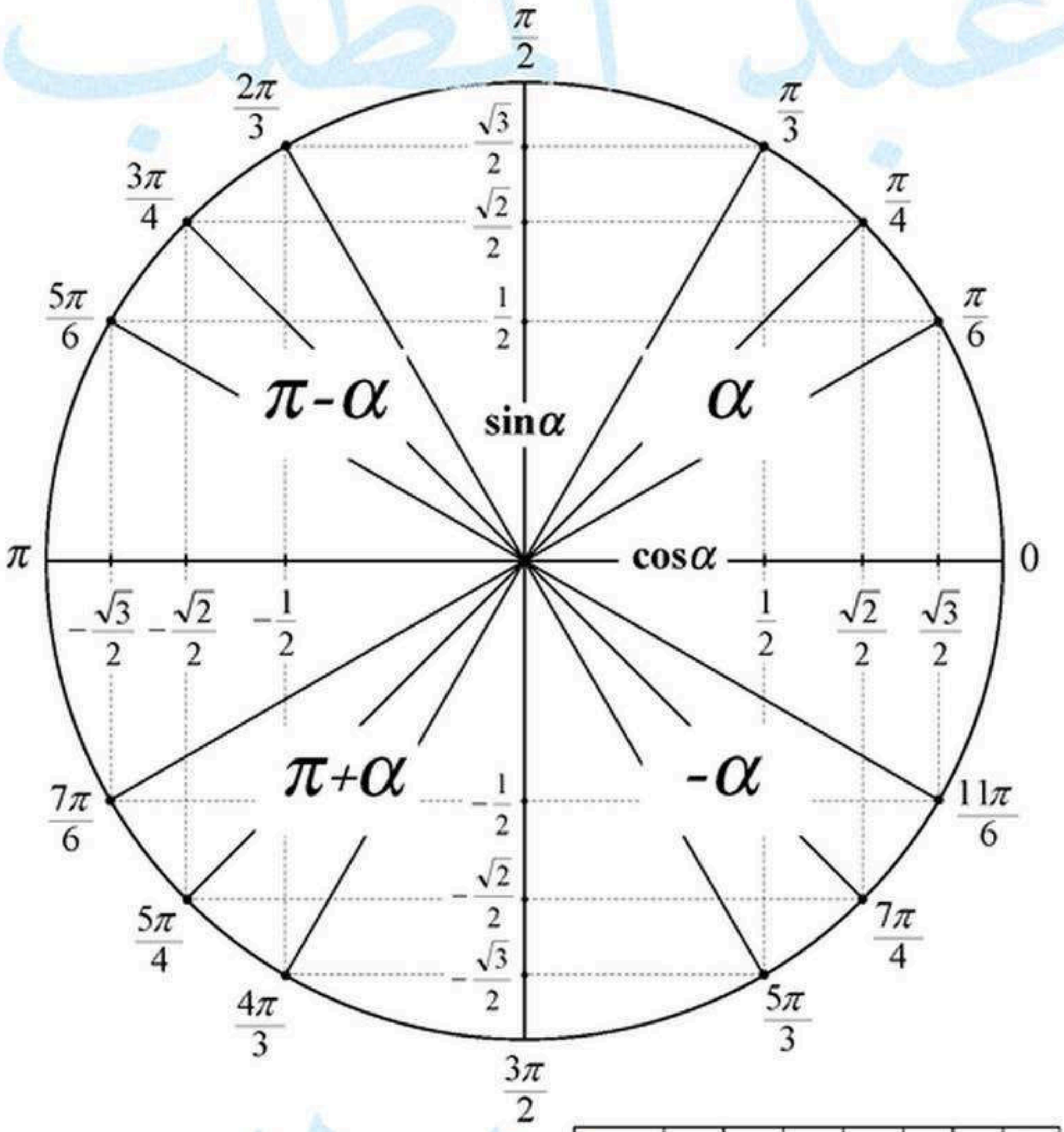
$\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}$ و



أو القطران متناصفان ومتعامدان ومتساويان

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

Cercle Trigonométrique



$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$2\cos^2\alpha=1+\cos2\alpha$$

$$2\sin^2\alpha=1-\cos2\alpha$$

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM