الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التكوين والتعليم المهنيين
Ministère de la Formation et de l'Enseignement Professionnels

Centre National de l'Enseignement Professionnel à Distance (CNEPD)

المركز الوطني للتعليم المهني عن بعد (م.و.ت.م.ب)

درس في الرياضيات العامة

يتكون درسكم في الرياضيات من ستة أجزاء نتطرق من خلالها إلى التذكير بالمبادئ الأساسية للرياضيات الخاصة بالمجموعات، الجبر الخطي، دراسة الدوال البسيطة، الهندسية و الأسية كما يحتوي على تذكير حول الحساب و المتتاليات العددية.

هذه المطبوعة من الدرس لا تمثل إلا لمحة عامة تستحق الدعم بمراجع أكثر ثراءا و تعمقا .

يعالج هذا الدرس عموميات حول المجموعات، العلاقات و التطبيقات حيث نستهله بمقدمة لبعض المفاهيم التي نستعملها سويا في هذا الدرس، أين يتكون هذا الأخير بدوره من ثلاثة دروس:

- الدرس الأول: المجموعات؛
- الدرس الثاني: العلاقات؛
- الدرس الثالث: التطبيقات.

مقدمة :

- **الحد الأولي :** تسمى الحدود أولية إذا كانت حدود غير معرفة بنظرية.

- **جملة:** نسمى الجملة كل مجموعة حدود أولية سواء كانت تحمل معنا أولا.

- **القضية :** تعرف القضية كجملة تحمل معنى و قيمة صحيحة كانت أو خاطئة و نرمز لها بـ "V" أو" F "

مثال: تكون القضية "x >10 " صحيحة إذا كانت قيمة "x" أكبر تماما من "10" و تكون خاطئة في باقي الحالات.
عموما يرمز للقضايا بـ "...,R,Q,P"

- **قضية بد يهية :** هي قضية صحيحة مبدئيا

- **نفي قضية:** نرمز لها بـ "non P" أو بـ "⌉P" و هي نفي القضية "P"

مثال: P: "2+2=4" ⌉P هي "2+2 ≠4" .

- جدول حقيقة القضية **P** :

P	⌉P
V	F
F	V

V : صحيحة
F : خاطئة

- **الفصل :**

يكون فصل القضيتين P و Q الذي نرمز بـــ $P \vee Q$ صحيحا إذا كانت على الأقل إحدى القضيتين P و Q صحيحة.

تذكير: الرمز $\vee$ يعني "أو".

جدول حقيقة القضية $(P \vee Q)$:

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- **الوصل :**

يكون وصل القضية P و Q القضية الذي يرمز له بـــ $(P \wedge Q)$ صحيحا إذا و فقط إذا كانت كلتا القضيتين صحيحتين معا .

جدول حقيقة القضية $(P \wedge Q)$:

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

الإستلزام : تدعى القضية ($\neg P$ ou Q) استلزاما و يرمز لها بـ $(P \Rightarrow Q)$ ونقرأ P تستلزم Q حيث تكون القضية $(P \Rightarrow Q)$ خاطئة إذا كانت الأولى صحيحة و الثانية خاطئة و تكون صحيحة في باقي الحالات .(أنظر جدول الحقيقة)

- **التكافؤ**: تكون القضيتين P و Q متكافئين إذا كانت القضيتين $(P \Rightarrow Q)$ $(Q \Rightarrow P)$ صحيحتين.

جدول الحقيقة:

P	Q	$Q \Rightarrow P$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

نستخلص من الجدول الحقيقة بعض الخصائص نذكر منها:

$\neg(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P \wedge \neg Q$

$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

$P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

أنماط البرهان:

- **البرهان بالاستنتاج** : يعتمد هذا النوع من البرهان علـــى القاعـــدة التالية:

إذا كانت القضية $(P \Rightarrow Q)$ صحيحة و كانت P صحيحة فإن Q صحيحة.

هذا يعني أن نفترض أن القضية P صحيحة باســتعمال قواعــد نسبية صحيحة نتوصل إلى إستنتاج القضية Q و هذا يكفي لأن نقول بأن القضية Q صحيحة.

- **البرهان بالعكس:** لنبرهن أن القضية $(P \Rightarrow Q)$صحيحة؛ يكفي أن نبرهن أن القضية ($\neg$Q $\neg$ P) $\Rightarrow$صحيحة يعني أن القضية (P $\Rightarrow$ Q) و $\neg$Q $\neg$ P) صحيحتين و بالتالي تكون P خاطئة .

- **البرهان بالخلف:** إذا كانت القضية($\neg$ P Q) $\Rightarrow$صحيحة و كانت القضية Q خاطئة فإن P صحيحة .

مثال:

القضية $[(x\langle 0) \Rightarrow (-x \geq 0)]$صحيحة لأن $(-x \geq 0)$ و($x \geq 0$) خاطئة .

- **البرهان بالتراجع:** لنبرهن أن القضية $(P_{(n)} / n \in N)$ صحيحة يكفي أن نثبت أن $(P_{(n_0)} / n_0 \geq 0)$صحيحة ،ثم نفترض أن الخاصية P صحيحة من أجل n ، و نبرهن أنها صحيحة من أجل(n +1).

الـــدرس رقم 01: المجموعات

خـــطـــة الدرس رقم 01:

I – مبادئ حول المجموعات

II - خصائص المجموعات

III - عمليات حول المجموعات

1–التقاطع

2–الإتحاد

3– المتـــــــــممة

4– الفـــرق بين مجموعتين

5– الفـــرق التناظري

6– الجداء الديكـــارتي

IV – مجـــموعة أجزاء مجمـــوعة و تجزئة مجمـــــوعة

V – تمارين

VI – حلول تمارين

I- مبادئ حول المجموعات :

المجموعة هي عبارة عن تجمع عناصر تحمل نفس الإسم لتكون كائن جديد يتضمن خصائص هذه العناصر بحيث يمكن تطبيق كل عمليات المجموعة عليه.

مثال :

a,b,c,d : هي عناصر مجموعة الحروف الهجائية .
2،4،6 : هي مجموعة عناصر الأعداد الطبيعية الزوجية .

II- خصائص المجموعات:

1- نقول على مجموعتين A و B أنهما متساويتان إذا ماحتوتا على نفس العناصر. $A \subset B$ و $B \subset A \Leftrightarrow A = B$ ؛

2- المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر تسمى بالمجموعة الخالية و نرمز لها بـــ $\varnothing$ ؛

3- إذا كانت المجموعة E تحتوي على عدد متناهي من العناصر، فإن هذا الأخير يدعى القيمة المطلقة لـــ " E" و يرمزله بـــ $|E|$.

III - عمليات حول المجوعات:

1- **التقاطع**: تقاطع المجموعتين E و F هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى E و F و نرمز لها بـــ $E \cap F$.

مثال :

$A = \{ x \in \Re / 0 \langle x \langle 2 \};$
$B \{ x \in \Re / -1 \langle x \langle 1 \};$

=

$A \cap \{ x \in \Re / 0 \langle x \langle 1 \}.$

B =

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

2- الإتحاد:

إتحاد المجموعتين E و F هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى E و F و نرمز له بـــ : $E \cup F$.

3- المتممة :

المتممة الجزئية للمجموعة F من المجموعة E هي المجموعة الجزئية لـــ E التي لا تحتوي على أي عنصر من F و نرمز لها بـــ: C_E^F . حالات خاصة :

$$C_E^E = \phi$$

$$C_E^\phi = E$$

4- الفرق بين مجموعتين:

يرمزله بـــ E / F و هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلـــى E و لا تنتمي إلى F و نسمي هذا: الفرق بين E و F .

5- الفرق التناظري :

نسمي الفرق التناظري للمجموعتين E و F المجموعة (E–F) ∪ (F–E) .

6- الجداء الديكارتي :

لتكن المجموعتين E و F ، نسمي الجداء الديكارتي للمجموعتين E و F الذي نرمز له بـــ E × F مجموعة الثنائيات (x, y) حيـــث x ينتمي إلى E و y ينتمي إلى F :

$$(x, y) / x \in E \text{ و } y \in F$$

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

مثال : $F=\{a,b\}$ و $E=\{1,2,3\}$

$$E\times F=\{(1,a),(2,a),(3,a),(1,b),(2,b),(3,b)\}$$

IV- مجموعة أجزاء مجموعة و تجزئة مجموعة:

التعريف :

1- نسمي مجموعة أجزاء مجموعة ، المجموعة المتكونة من كل أجزاء هذه المجموعة . نرمز لها بـــ P (E).

$$P(E)=\{x, x\in E\}$$

2- نسمي تجزئة المجموعة E ، الأجزاء الغير الخالية للمجموعـــة E المنفصلة مثنى مثنى ، حيث يكون إتحادها المجموعة E نفسها .

مثال:

$$E=\{2,4,6,8,10\}$$

$$A=\{2,4\} \qquad B=\{8,10\}, \qquad C=\{6\}$$

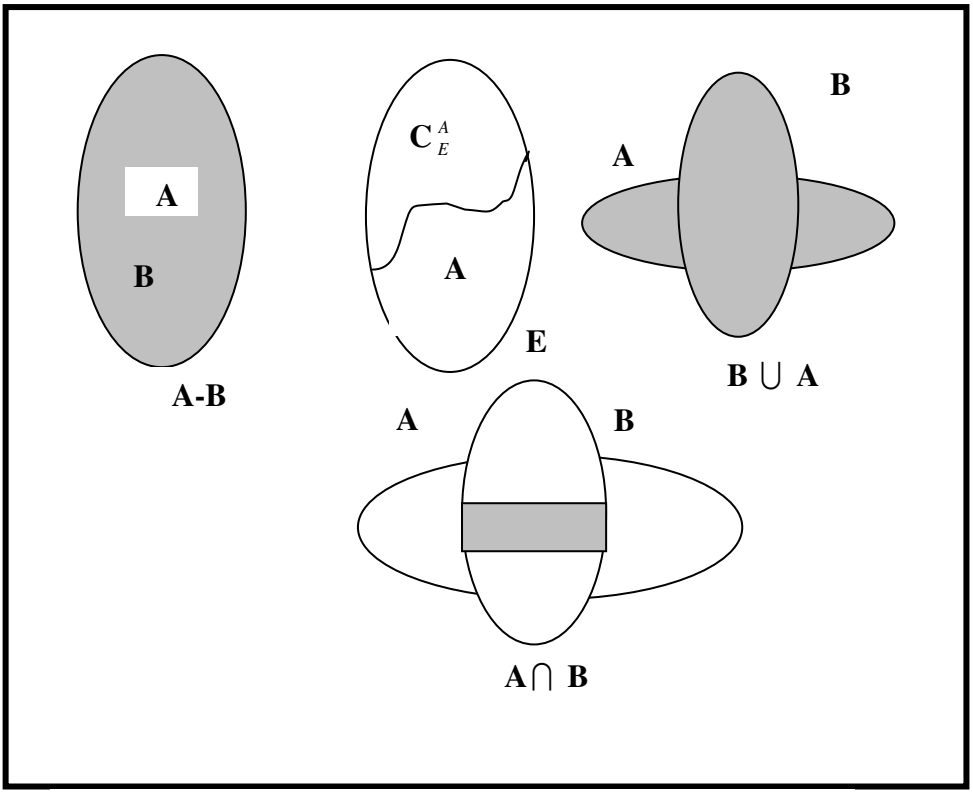
A,B,C تكون تجزئة المجموعة E لإن :

- A,B,C غير خالية $(\neq\phi)$؛
- $A\cap B=\phi, \quad A\cap C=\phi, B\cap C=\phi$ (الأجزاء A,B,C للمجموعة E منفصلة مثنى مثنى)؛
- الإتحاد يكون المجموعة E: $A\cup B\cup C=E$.

مخطط VENN:

إذا أردنا تمثيل عناصر مجموعة بنقاط و نحصرها بداخل منحنى دائري ، ذلك يمثل صورة مجموعة برسم تخطيطي يدعى بمخطط VENN و لكم بعض الأمثلة :

مثال: لتكن: $E = \{a,b,c\}$; $P(E) = \{\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\}\{a,c\},\{b,c\},\mathrm{E}\ \}$



مخطط Venn

V- تمارين:

1- أرسم جدول الحقيقة لـــ: $(P \wedge \neg Q)$ و$(Q \vee \neg P)$ أي $\overline{(P \wedge \neg Q) \vee (Q \vee \neg P)}$؛

2- قارن بين جداول الحقيقة لكل من:
$[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ و $[(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R]$ ؛

3- لتكن **E** مجموعة الأعداد الطبيعية القابلة للقسمة على 4 و6. أوجد عكس أو نفي القضية P حيث: $(p : \forall x, x \in E)$ x يقبل القسمة على 24؛

برهن أن $\neg P$ صحيحة و منه P خاطئة؛

4- لتكن E مجموعة الأعداد الزوجية من 2 إلى 40 ؛
A, $A \subset E$ تحتوي على مضاعفات 6؛
B, $B \subset E$ تحتوي على مضاعفات 30 ؛
C, $C \subset E$ تحتوي على مضاعفات 10؛

أحسب: $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ $\mathbf{C}_E^B$, $\mathbf{C}_E^A$ ، $\mathbf{A} \cup \mathbf{C}$ ، $\mathbf{A} \cap \mathbf{C}$.

VI- حلول التمارين:

1-

P	Q	⌝P	⌝Q	Q ∨ P	Q)∨ ⌝(P	⌝Q ∧ ⌝P
V	**V**	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**
V	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**
F	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**

P	Q	R	Q⇒P	R⇒Q	R⇒Q)⇒ (P	R)⇒(Q⇒ P
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**	**F**
V	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**

2-

نستنتج من خلال العمودين الظاهرين على الجدول أن:
$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ و $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ مختلفين.

-3

$E = \{x / x \in N, x$ يقبل القسمة على 4 و 6$\}$

$\forall x, x \in E$ ، x يقبل القسمة على 24 : هي القضية P

$\exists x, x \in E$ ، x لا يقبل القسمة على 24: هي نفي القضية P يعني $\neg P$.

$E = \{12,24,36,48,...\}$

من أجل $x = 12$ ، x لا يقبل القسمة على 24: $(x \in E)$ إذن $\neg P$ صحيحة و P خاطئة .

-4

E= {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14,16,…,40}**;**

A= {6, 12, 18, 24, 30,36};

B= {30};

C = {10, 20, 30,40};

$\mathbf{C}_E^A$ ={2,4,8,10,14,16,20,22, 26,28,32,34,38,40};

$\mathbf{C}_E^B$ = E –B;

A ∪ **B** =**A; A** ∪ **C** ={ 6,12,18,24,36,10,20,30,40};

A ∩ **C**= {30}.

الدرس رقم 02: العلا قات

خطة الدرس رقم 02:

تعريف

I - التمثيل التخطيطي

II- خواص العلاقات

1- إنعكاسية

2- تناظرية

3- ضد تناظرية

4- متعدية

III - علاقة التكافؤ

IV - أصناف التكافؤ

V - علاقة الترتيب الكلي

VI - علاقة الترتيب الجزئي

VII - تمارين

VIII – حلول التمارين

تعريف:

لتكن مجموعتين X و Y نسمي العلاقة $\Re$ من X إلى Y كل ثلاثيـــة (x,y,g) حيث:

G : جزء من الجداء الديكارتي (X ×Y)

X : مجموعة إنطلاق العلاقة $\Re$؛

Y : مجموعة وصول العلاقة $\Re$ ؛

G : منحنى العلاقة $\Re$.

إذا كان $(x,y)\in G$، نقول بأن x له علاقة بـــ y و نكتب $x \Re y$.

y : هي صورة x بالعلاقة $\Re$.

x : هي سابقة y *بالعلاقة* $\Re$.

$$G=\{(x,y)/\, x\in X, y\in Y, x\Re\ y\}$$

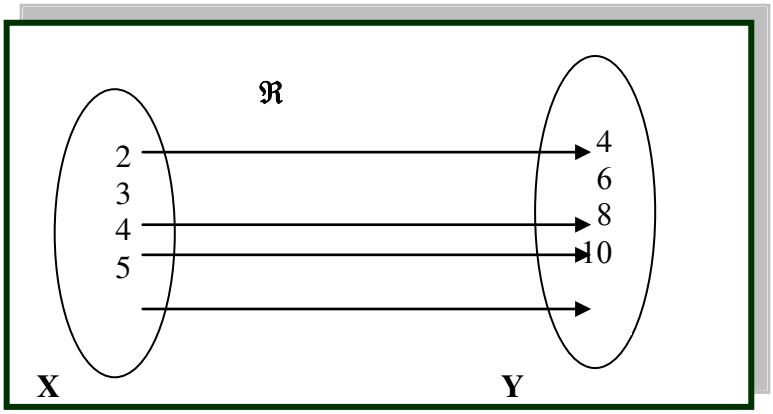
مثال: لتكن مجموعتين X و Y ، *و العلاقة* $\Re$ من X *إلى* Y

$$X=\{2,3,4,5\} \quad Y=\{4,6,8,10\},$$

تعريف العلاقة كما يلي: y نصف x $\Leftrightarrow$ x $\Re$ y

– مثل منحنى العلاقة $\Re$.

ليكن G منحنى العلاقة $\Re$: $G=\{(2,4),(3,6),(4,8),(5,10)\}$



G منحنى العلاقة ℜ

ملاحظة :

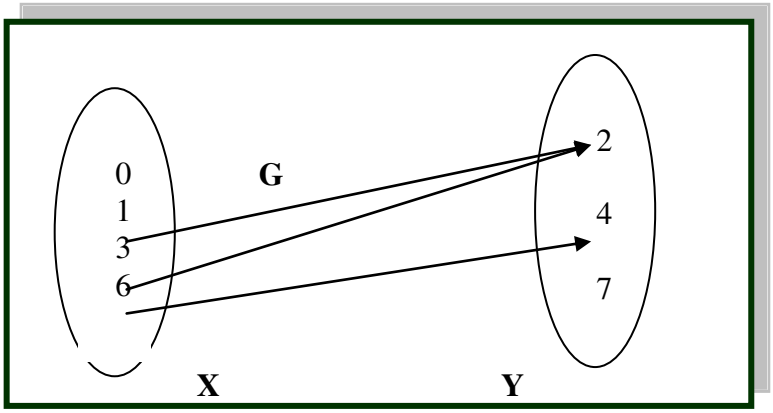
– **العلاقة العكسية** : إذا كان لـــ x علاقة مع y بالعلاقة ℜ فإن y موصول بـــ x بالعلاقة $\Re^{-1}$ و تسمى بالعلاقة العكسية.

I- التمثيل التخطيطي:

الأسهم التي تربط بين عنصر من X و عنصر من Y تمثل العلاقة بين عناصر X و عناصر Y.

مثال: 3ℜ2 و 6ℜ 4

مخطط هذه العلاقة يكون كالتالي : $G = \{(3,2),(6,2), (6,4)\}$



II- خواص العلاقات :

1- انعكاسية :

تسمى العلاقة $\Re$ المعرفة في المجموعة X بالانعكاسية إذا و فقط إذا كان عنصر من X له علاقة مع نفسه.

$\Re$ انعكاسية في: $X \Leftrightarrow (\forall x \in X \text{ و } x\Re x)$

مثال:

لتكن العلاقة $\Re$ معرفة في المجموعة R كما يلي: $x \Re y \Leftrightarrow x \leq y$

هل العلاقة $\Re$ انعكاسية في المجموعات R ؟

$\Re$ انعكاسية في المجموعة R إذا كان :

$\forall x \in R, xRx \quad \Leftrightarrow \forall x \in R, x \leq x \quad \forall x \in R, x R x$

$x \leq x$ صحيحة لأن كل عنصر أو عدد x يساوي نفسه دائما إذن العلاقة $\Re$ انعكاسية.

2- تناظرية :

علاقة $\mathfrak{R}$ معرفة في مجموعة X تسمى بالعلاقة التناظرية إذا و فقط إذا كان:

$$\forall (x,y) \in X^2, x\mathfrak{R}\ y \Rightarrow y\mathfrak{R}\ x$$

مثال:

نعرف في المجموعة Z العلاقة $\mathfrak{R}$ بحيث:

$$x\mathfrak{R}\ y \Leftrightarrow (\exists k \in Z)/\ x - y = 2k$$

لنبرهن على أن العلاقة $\mathfrak{R}$ تناظرية .

بناء على التعريف تكون $\mathfrak{R}$ علاقة تناظرية إذ كان:

$$\forall (x,y) \in Z^2, x\mathfrak{R}\ y \Leftrightarrow y\mathfrak{R}\ x$$

و بناءا على تعريف العلاقة $\mathfrak{R}$ دينا:

$$y\mathfrak{R}\ x \Leftrightarrow (\exists k \in Z)/\ y - x = 2k$$

$$y\mathfrak{R}'\ x \Leftrightarrow (\exists k' \in Z)/\ y - x = 2k'$$

$$y\mathfrak{R}\ x \Leftrightarrow (\exists k \in Z)/\ y - x = 2k$$

نريد البرهان على :

علما أن $(x-y) = -2k \Leftrightarrow y - x = 2(-k) : x\mathfrak{R}y$

نعلم بأن: $k \in Z$ إذن $(-k) \in Z$ و منه $k' = -k$

$\exists k' \in Z$ حيث $-k = k'$

$y - x = 2k'$ ، $k' \in Z$

و منه $y\mathfrak{R}\ x$ و العلاقة $\mathfrak{R}$ تناظرية.

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

3- ضد تناظرية:

تسمى العلاقة $\Re$ المعرفة في مجموعة $\mathbf{X}$ بضد تناظرية إذا وفقط إذا كان :

$$\forall (x,y) \in X^2, x\Re y \text{ و } y\Re x \Rightarrow x = y$$

مثال:

نعرف علاقة $\Re$ في المجموعة R بـــ: $x\Re y \Leftrightarrow x \geq y$

هل العلاقة $\Re$ ضد التناظرية ؟

$$\forall (x,y) \in R^2, x\Re y \text{ و } y\Re x \Rightarrow x = y \, ?$$

المعطيات:

لدينا: $\forall (x,y) \in R^2, x\Re y \Leftrightarrow x \geq y$

و

$$x\Re y \Leftrightarrow y \geq x$$

المطلوب : نريد البرهان على أن $x = y$

البرهان:

لدينا :

$$\left.\begin{array}{l} x \geq y \\ y \geq x \end{array}\right\} \Rightarrow x = y$$

فالعلاقة $\Re$ ضد تناظرية في المجموعة R.

4- متعـــــدية :

تسمى العلاقة $\Re$ المعرفة في المجموعة x بالمتعدية إذا وفقط إذاكان :

$$\forall(x,y,z)\in X^3, x\Re\, y\ و\ y\Re\, z \Rightarrow x\Re\, z$$

مثال:

نعرف في المجموعة Z العلاقة $\Re$ كما يلي :

$$x\Re\, y \Leftrightarrow \exists k \in Z / x-y=5k$$

- لنبرهن أن $\Re$ متعدية؟

$\Re$متعدية في المجموعة Z إذا كان:

$$\forall(x,y,z)\in Z^3, x\Re\, y\ و\ y\Re\, z \Rightarrow x\Re\, z$$

لدينا :

$$x\ \Re\ y \Leftrightarrow \exists\ k \in \mathbf{Z},\ x-y=5k$$

$$y\ \Re\ z \Leftrightarrow \exists\ k' \in \mathbf{Z},\ y-z=5k'$$

نريد أن نبرهن على أن : $x\ \Re z \Leftrightarrow \exists k'' \in Z / x-z=5k''$?

البرهان :

$\exists\ k \in Z / x-y=5k$

لدينا:

$\exists\ k' \in Z / x-z=5k'$

$x-z=5k+5k'$

$x-z=5(k+k')$

و بما أن :

$$k \in \mathbb{Z}$$
$$k' \in \mathbb{Z} \Rightarrow K+K' \in \mathbf{Z}$$

k + k'=k"

نضع:

و نحصل $x - y = 5\,k'' \Leftrightarrow x\ \Re\ z$

على :

و منه $\Re$ متعدية في المجموعة **Z**.

III- علاقة التكافؤ:

لتكن X مجموعة و $\Re$ علاقة معرفة في X .نقول بأن العلاقة $\Re$ المعرفة في المجموعة X علاقة تكافؤ إذا وفقط إذا كانت إنعكاسية ، تناظرية و متعدية.

IV- أصناف التكافؤ:

لتكن X مجموعة و $\Re$ علاقة تكافؤ معرفة في المجموعة X و ليكن x عنصر من المجموعة X.

عندما تكون العلاقة $\Re$ تكافؤية في المجموعة X، يمكننا تقسيم عناصر X إلى مجموعات جزئية منفصلة بحيث تكون كل عناصر المجموعة الجزئية تكافؤية.

نسمي صنف التكافؤ كل جزء من أجزاء هذه المجموعة حَيث x يمثل صنف تكافؤ x.

V- علاقة الترتيب الكلي:

علاقة ترتيب هي علاقة في مجموعة X حيث تكون انعكاسية ، ضد تناظرية و متعدية في آن واحد .

مثال:

$X = \mathbb{N}$ (مجموعة الأعداد الطبيعية)؛
أصغر أو يساوي ($\geq$) هي علاقة ترتيب ؛
أصغر تماما ($<$) ليست علاقة ترتيب.
نقول أن العلاقة $\Re$ علاقة ترتيب كلي في المجموعة X إذا كان لكل عنصر x عنصر y من المجموعة X بالعلاقة $\Re$ أي: $x \Re y$ أو $y \Re x$.
يعني:

$$\forall (x,y) \in X^2, x \Re y \text{ أو } y \Re x.$$

مثال :

العلاقة أصغر أو يساوي ($\geq$) في مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ هي علاقة ترتيب كلي .

VI- علاقة الترتيب الجزئي:

نقول أن علاقة ترتيب في المجموعة X هي علاقة ترتيب جزئي إذا و فقط إذا لم تكن علاقة ترتيب كلي.

مثال :

علاقة ترتيب $\Re$ المعرفة في المجموعة $\mathbb{N}$ كما يلي:

$x R y \Leftrightarrow x$ مضاعف y

هي علاقة ترتيب جزئي.

VII- تمارين:

التمرين الأول:

في المجموعة R^* نعرف العلاقة $\Re$ كما يلي: $x\Re y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$

1- أدرس خصائص العلاقة $\Re$

2- أبحث عن عناصر الصنف 2 و الصنف (-1).

التمرين الثاني:

نعرف في المجموعة $\mathbb{N}$ العلاقة $\Re$ كما يلي: $x\Re y \Leftrightarrow x \leq y$

برهن على أن العلاقة $\Re$ هي علاقة ترتيب في $\mathbb{N}$.

VIII- حلول التمارين:

التمرين الأول:

1- دراسة خصائص العلاقة $\Re$:

1.1 - انعكاسية:

$\forall x, x \in |\mathbf{R}^*, x \Re x$?

$x \Re y \Leftrightarrow [x^2 - x^2 = x - x]$

$x^2 - x^2 = x - x = 0.$

$0 = 0$

و منه العلاقة $\Re$ انعكاسية .

2.1- تناظرية:

$\forall (x,y) \in |R^{*2}, x \Re y \Rightarrow y \Re x;$

$x \Re y \Leftrightarrow [x^2 - y^2 = x - y]$

من معطيات:

$y \Re x \Leftrightarrow y^2 - x^2 = y - x$?

$x^2 - y^2 = x - y \Rightarrow -(x^2 - y^2) = -(x-y) \Rightarrow y^2 - x^2 = y - x$

و منه العلاقة $\Re$ تناظرية .

3.1- متعدية:

$$\forall\ (x, y, z) \in |\mathbf{R}^{*3},\ \left.\begin{array}{l} x\ \mathfrak{R}\ y \\ \text{و} \\ y\ \mathfrak{R}\ z \end{array}\right\} \Rightarrow x\ \mathfrak{R}\ z\ ?$$

$$\left.\begin{array}{l} x\ \mathfrak{R}\ y \Leftrightarrow [x^2-y^2=x-y] \\ y\ \mathfrak{R}\ z \Leftrightarrow [y^2-z^2=y-z] \end{array}\right\} \text{من المعطيات}$$

$$x\ \mathfrak{R}\ z \Leftrightarrow [x^2-z^2= x -z]\ ?$$

$$x^2- y^2+ (y^2 - z^2)= x- y+(y -z)$$

$$x^2-y^2 + y^2 - z^2 = x-y +y-z$$

$x^2- z^2 =x-z \quad \Rightarrow x\ \mathfrak{R}\ z$ و بالتالي $\mathfrak{R}$ **متعدية.**

فإن العلاقة

2- عناصر الصنف 2 و الصنف (1-):

1.2- صنف 2 :

$$\overline{2} = \{x, x \in \mathbf{R}^*/x\ \mathfrak{R}\ 2\}$$

$$=\{x, x \notin \mathbf{R}^*/x^2-2^2 = x - 2\}= \{x, x \in \mathbf{R}^*/x^2 - 4 = x -2\}$$

$$\overline{2}=\{ x, x \notin \mathbf{R}^*/x^2- 4+ 2-x =0\}$$

$$=\{ x, x \notin \mathbf{R}^*/ x^2-x-2 = 0\}$$

نحل المعادلة من الدرجة الثانية: $x^2-x-2 = 0$

$$\Delta = b^2-4ac = 1 + 4\times1\times2= 9$$

$\Delta \rangle 0$ و منه المعادلة تقبل جذرين مختلفين:

$x_1 = -b - \sqrt{\Delta}/2a = (1-3)/2 = -1$ أي $: x_1 = -1$

$x_1 = -b + \sqrt{\Delta}/2a = (1+3)/2 = 2$ أي $: x_2 = 2$

و منه صنف هو: $\overline{2} = \{2, 1\}$

2.2- نصف (-1) :

$\overline{-1} = \{x, x \in R^* / x^2 - (-1)^2 = x + 1\}$

$= \{x, x \in R^* / x^2 - 1 = x + 1\}$

$= \{x, x \in R^* / x^2 - 1 - x - 1 = 0\}$

$= \{x, x \in R^* / x^2 - x - 2 = 0\}$

نفس المعادلة السابقة و منه $\overline{(-1)} = \{2, -1\}$.

التمرين الثاني:

برهان أن العلاقة $\mathfrak{R}$ علاقة ترتيب:

1- $\mathfrak{R}$ انعكاسية :

$\forall x \in |\mathbf{N}$, $x \mathfrak{R} x$?

$x \mathfrak{R} x \Leftrightarrow x \leq x$ (صحيحة)

ومنه $\mathfrak{R}$ علاقة انعكاسية في $|\mathbf{N}$

2- $\mathfrak{R}$ ضد تناظرية:

$$\forall (x, y) \in |N^2, x \mathfrak{R} y \text{ et } y \mathfrak{R} x \Rightarrow x = y$$

المعطيات:

$$x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow x \leq y$$

لدينا :

و

$$y \mathfrak{R} x \Leftrightarrow y \leq x$$

$$x \leq y \Leftrightarrow 0 \leq y - x$$
$$\Leftrightarrow y - x \geq 0$$

$$y \leq x \Leftrightarrow y - x \leq 0$$
$$0 \leq y - x \leq 0 \Rightarrow y - x = 0 \Rightarrow x = y$$

ومنه العلاقة $\mathfrak{R}$ ضد تناظرية

3- متعدية :

$$\forall (x, y, z) \in |N^3, x \mathfrak{R} y \text{ و } y \mathfrak{R} z \Rightarrow x \mathfrak{R} z$$

المعطيات:

لدينا:

$$\begin{cases} x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow x \leq y \\ y \mathfrak{R} z \Leftrightarrow y \leq z \end{cases}$$

$$z \mathfrak{R} x \Leftrightarrow z \geq x \text{ ؟}$$

لنبرهن أن : x

$$\left.\begin{array}{l} x \leq y \\ \text{و} \\ y \leq z \end{array}\right\} \Rightarrow x+y \leq y+z \Rightarrow x \leq z$$

و منه العلاقة $\mathfrak{R}$ متعدية في المجموعة $\mathbb{N}$.

بما أن العلاقة $\mathfrak{R}$ انعكاسية ، ضد تناظرية و متعدية فهي علاقة ترتيب في المجموعة $\mathbb{N}$.

الدرس رقم 03: التطبيقات

خطة الدرس رقم 03:

تعريف

I – خواص التطبيقات

1– التطبيق المتباين

2– التطبيق الغامر

3– التطبيق التقابلي

4– التطبيق العكسي

II – تركيب التطبيقات

III – تمارين

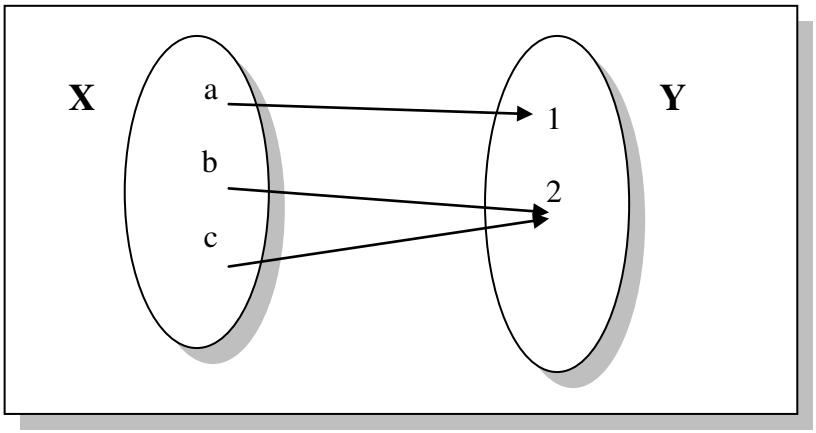
IV – حلول التمارين

تعريف:

لتكن المجموعتان X و Y تعرف العلاقة التي تربط كل عنصر x من المجموعة X مع عنصر y من المجموعة Y بالتطبيق.

$$f : X \to Y$$

f : هو تطبيق إذا وفقط إذا كان: $\forall x \in X, \exists ! y \in Y / y = f(x)$



مثال 01 :

لتكن الدالة f معرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow f(x) = 3x^2 - 2x$$

مجال تعريف الدالة P هو: $D_f = \mathbb{R}$

يمكننا إذن القول أن $\forall x \in \mathbb{R}$ فإن $f(x)$ معرف (أي لديه قيمة في $\mathbb{R}$)
و منه نستنتج أن f تطبيق من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$

مثال 02 :

لتكن الدالة f معرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \to f(x) = \frac{x-2}{x+1}$$

مجال تعريف الدالة f هو $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$
f ليس بتطبيق من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ لأن (-1) ليس له صورة بالدالة f.
و منه f تطبيق من $\mathbb{R} - \{-1\}$ نحو $\mathbb{R}$.

I- خواص التطبيقات:

1- <u>التطبيق المتباين</u> :

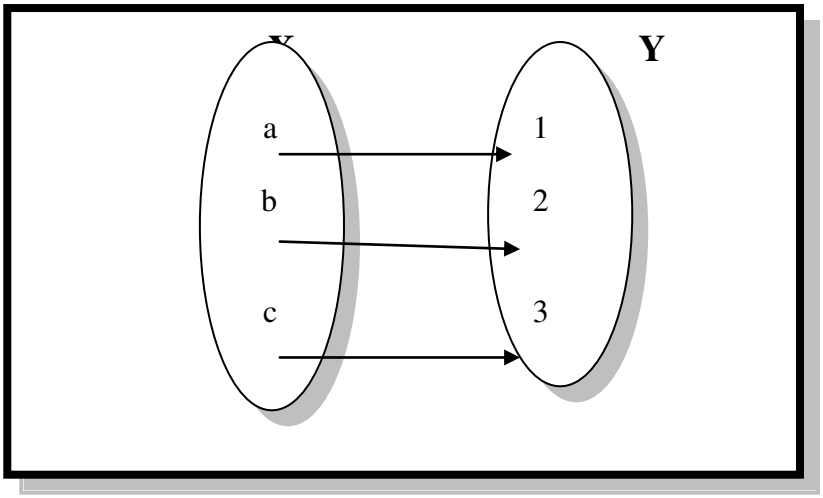
لتكن f تطبيق من X نحو Y . يكون التطبيق f متباينا إذا وفقط إذا كانت لكل عنصر y من Y سابقة على الأكثر في X.

f تطبيق متباين

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \; \forall (x_1, x_2) \in x^2 \quad \text{و}$$

كما يمكننا استعمال نقيض القضية :

$$\forall (x_1 \neq x_2) \in X^2, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$



مثال :

ليكن التطبيق f معرف من $|R^*$ نحو $|R$ كما يلي:

$$f : |R^* \longrightarrow |R$$

$$x \to f(x) = \frac{2x+3}{x}$$

هل التطبيق f متباين؟

إذا كان : $\forall (x_1, x_2) \in |R^{*2}, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

فإن التطبيق f متباين.

بتعويض x_1 و x_2 بقيمتها نجد:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow (2x_1+3)/x_1 = (2x_2+3)/x_2$$

$$\Leftrightarrow (2x_1+3)\, x_2 = (2x_2+3)\, x_1$$

$$\Leftrightarrow 2x_1 x_2 + 3x_2 = 2x_2 x_1 + 3x_1$$

$$\Leftrightarrow 3x_2 = 3x_1$$

$$\Leftrightarrow x_2 = x_1$$

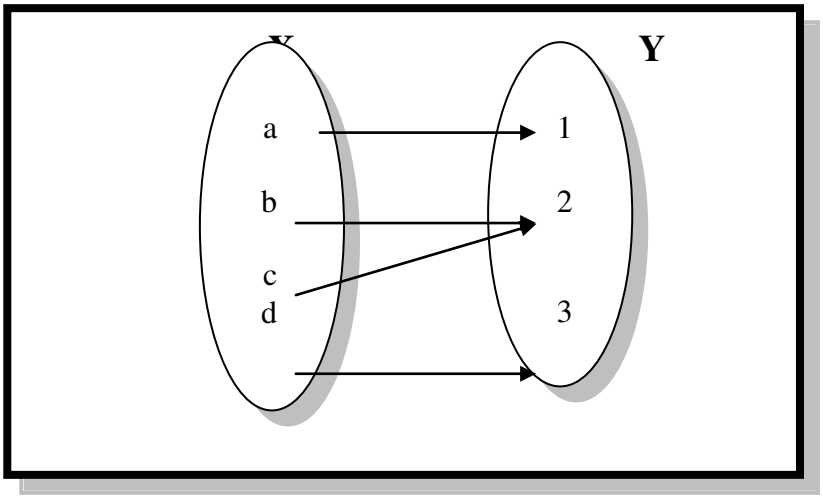
و منه فإن f تطبيق متباين من $|R^*$ نحو $|R$.

2- التطابق الغامر:

ليكن f تطبيق من X نحو Y، نقول أن f غامر إذا وفقط إذا كانت لكل عنصر من Y سابقة على الأقل في X بالتطبيق f.

$$f \text{ غامر } \Leftrightarrow \forall y \in Y, \exists x \in X \,/\, y = f(x)$$

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر



مثال:

ليكن f تطبيق معرف من $|R-\{1-\}$ نحو $|R$ كمايلي :

$$f : |R-\{1-\} \longrightarrow |R$$

$$x \to f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

برهن أن f غامر من $|R-\{1-\}$ نحو $|R$

f غامر من $|R-\{1\}-|R$ إذا كان:

$$\forall y \in |R, \exists x \in |R - \{1\} \quad / \quad y = f(x)$$

$$y = \frac{2x+1}{x-1} \Leftrightarrow y(x-1)=2x+1$$

لدينا:

$$\Leftrightarrow y\,x - y = 2x + 1$$
$$\Leftrightarrow y\,x - 2x = y + 1$$
$$\Leftrightarrow x(y-2) = y + 1$$

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

هناك حالتين ممكنتين:

- إذا كان: $y \neq 2 \Leftrightarrow y - 2 \neq 0$

و منه لدينا : $x = \frac{y+1}{y-2}$

- إذا كان : $y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2$

و منه $x(y-2) = y + 1$
$x(2-2) = 2 + 1$
$x \times 0 = 3$ غير ممكن

يعني أنه من أجل $y = 2$ ليس لـــ x قيمة.

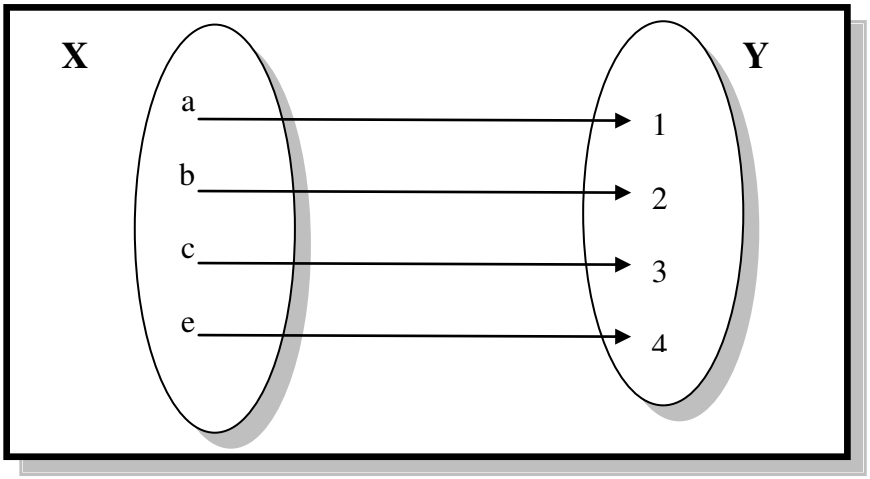
الاستنتاج : f ليس غامر من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R} - \{1\}$ و لكن f غامر من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R} - \{2\}$ - $\{1\}$.

3- <u>التطبيق التقابلي</u>:

- يكون التطبيق f تقابلي إذا وفقط إذا كانت لكل عنصر من Y سابقة وحيدة في X بالتطبيق f .
- يمكن أن نعطي لهذا التعريف صيغة أخرى :
f تقابلي $\Leftrightarrow$ f غامر و f متباين .

$$\forall y \in Y, \exists ! x \in X / \; y = f(x)$$

- الرمز $(!)$ يعني عنصر وحيد .



4- التطبيق العكسي:

لكي تكون العلاقة العكسية لتطبيق تطبيقا، يجب و يكفي أن يكـــون التطبيق تقابلي.

يعرف التطبيق العكسي للتطبيق التقابلي f، بالتطبيق f^{-1} المعرف من Y نحو X كما يلي :

$$f : Y \to X$$
$$y \mapsto x = f^{-1}(y)$$
$$Y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

ملاحظة :

- العلاقة العكسية للتطبيق تقابل.
- نقول على التطبيق f أنه تراجعي إذا وفقط إذا كان يساوي تطبيقه العكسي.

f تراجعي $\Leftrightarrow$ $\left(\forall x \in X, f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f^{-1} = f\right)$

II- تركيب التطبيقات :

لتكن ثلاثة مجموعات X, Y, Z , f تطبيق من X نحو Y و g تطبيق من Y نحو Z .

التطبيق h من X نحو Z حيث: $h(x) = g[h(x)]$

بالتطبيق المركب من تطبيقين f و g و نرمز له بـــ $h = g \circ f$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

$$x \longrightarrow y = f(x) \longrightarrow z = g(y) = g[f(x)]$$

$$h = g \circ f$$

$$h : X \longrightarrow Z$$
$$x \longrightarrow z = (gof)(x) = h(x)$$

لدينا: $(gof)(x) = g[f(x)]$

مثال : ليكن f و g حيث:

$$f : X \longrightarrow Y$$
$$x \longrightarrow 2x+1$$

و

$$g : Y \longrightarrow Z$$
$$y \longrightarrow 2y$$

و منه:

$$h : X \longrightarrow Z$$

$$x \longrightarrow h(x)$$

$$h(x) = g \text{ of } (x) = g[f(x)]$$

$$= 2[2x+1]$$

$$= 4x+2$$

$$h = g \text{ of}$$

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$$

$$x \longrightarrow 2x+1 \longrightarrow 2(2x+1) = 4x+2$$

$$f\text{og}(x) = f[g(x)]$$

$$= 2(2x)+1$$
$$= 4x+1$$

بصفة عامة : $g\text{o}f \neq f\text{o}g$

حالات خاصة :

لتكن f تقابل من X نحو Y و له تطبيق عكسي f^{-1} من Y نحو X : f^{-}
$^{1}0f$ تطبيق من x نحوه.

$$y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(y) = x.$$

$(f^{-1} \circ f)$ يحول كل عنصر من X إلى نفسه: $(f^{-1} \circ f)$ هو تطبيق مطابق في X.

$$f^{-1} \circ f = I_x$$

f^{-1} هو تطبيق عكسي لـــ f ، ومنه $\boldsymbol{f^{-1} \circ f} = I_Y$

III - تمارين:

التمرين الأول :

ليكن f و g تطبيقين معرفين في $|\mathbf{R}$ كما يلي:

$$f: |\mathbf{R} \longrightarrow |\mathbf{R} \qquad g: |\mathbf{R} \longrightarrow |\mathbf{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = 1-2x \qquad x \longmapsto g(x) = 3x+2$$

برهن على أن f و g تقابليين.

التمرين الثاني :

ليكن:

$$f: |\mathbf{R} \longrightarrow |\mathbf{R} \quad \text{و} \quad g: |\mathbf{R} \longrightarrow |\mathbf{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = 1-2x \qquad x \longmapsto g(x) = 3x+2$$

استنتج:

$$(g^{-1} \circ f)(x) \quad \text{و} \quad (f^{-1} \circ g)^{-1}(x)$$

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

التمرين الثالث :

ليكن $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$x \to \frac{1}{x^2+1}$$

$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \to 3x-7$$

1- هل f و g تقابليين ؟

$(f \circ g)(1)$; $(f \circ g)(\sqrt{2})$; $(g \circ f)(1/2)$

2- أحسب:

IV- حلول التمارين:

التمرين الأول :

دراسة التطبيق f :

1- f متباين :

$$(f \text{ متباين}) \ \forall (x_1, x_2) \in |R^2 \quad \Leftrightarrow \quad [(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x1) \neq f(x_2)]$$
$$\Leftrightarrow [f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2]$$

لنضع:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Rightarrow 1\text{-}2\, x_1 = 1\text{-}2\, x_2$$

$$\Rightarrow 1\text{-}\, 2\, x_1 \text{ -}1\text{+}2\, x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{-}2\, x_1 + 2\, x_2 = 0$$

$$\Rightarrow 2(x_2 + x_1) = 0 \ \Rightarrow x_2 \text{-} x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = x_1$$

و منه f متباين.

2- f غامر:

$$f \text{ غامر} \quad \Leftrightarrow \quad \forall y \in |R, \exists\ x \in |R / y = f(x)$$

$$f(x) = 1\text{-}2x$$

$$y = 1\text{-}2x \Rightarrow 2x = 1\text{-}y \Rightarrow x = \frac{1-y}{2}$$

و منه f غامر في $|R$ إذن التطبيق f غامر.

و بالتالي f تقابلي.

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

دراسة التطبيق g :

1- متباين:

g متباين $\Leftrightarrow$ $\forall (x_1,x_2) \in |R^2 \; g(x_1)=g(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

نضع: $g(x_1)=g(x_2)$

$$\Rightarrow 3x_1+2=3x_2+2$$
$$\Rightarrow 3x_1+2-3x_2-2=0$$
$$\Rightarrow 3x_1-3x_2=0 \Rightarrow 3(x_1-x_2)=0$$
$$\Rightarrow x_1-x_2=0 \Rightarrow x_1=x_2$$

و منه g متباين:

2- غامر :

g غامر $\Leftrightarrow$ $\forall y \in |R, \exists x \in |R \; / y= g(x)$

$y = g(x)$

$y = 3x+2$

$y-2 = 3x$

$x = (y-2)/3.$

و منه g غامر في **|R**.

إذن التطبيق g تقابلي.

التمرين الثاني:

1- $(f^{-1}og)^{-1}(x)$ ؟

نعلم أن :

$y = f(x)$

$\Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

و نبحث عن $f^{-1}(y)$ ؟

$f: |R \longrightarrow |R$

$x \longmapsto f(x) = 1-2x$

$y = f(x) = 1-2x \Rightarrow x = (1-y)/2$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = x = (1-y)/2$

نحسب أولا: $(f^{-1}og)(x)$

$(f^{-1}og)(x) = f^{-1}[g(x)]$

$= f^{-1}[3x+2]$

$= [1-(3x+2)]/2$

$= [1-3x-2]/2$

$= [-1-3x]/2$

و منه:

$(f^{-1}og)^{-1}(y) = (-1-3x)/2$

$$y = (-1-3x)/2$$
$$\Rightarrow 2y = -1-3x$$
$$\Leftrightarrow 3x = -1-2y$$
$$\Leftrightarrow x = (-1-2y)/3$$

و بالتالي:

$$(f^{-1}og)^{-1}(y) = (-1-2y)/3 \quad \text{أو} \quad (f^{-1}og)^{-1}(x) = (-1-2x)/3$$

2 - g^{-1} of ؟

$$g(x) = 3x+2 = y \Rightarrow x = (y-2)/3$$

$$g^{-1}(y) = (y-2)/3$$

$$g^{-1} of(x) = g^{-1}[f(x)]$$:

و منه

$$= g^{-1}[1-2x]$$
$$= (1-2x-2)/3$$
$$= (-1-2x)/3$$

نتيجة: $(f^{-1}og)^{-1} = (g^{-1}of)$

التمرين الثالث:

$D_f| = R|$; $D_g| = R|$:

1 -

- f متباين:

$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 , f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow 1/(x_1^2+1) = 1/(x_2^2+1)$
$\Rightarrow x_2^2 + 1 = x_1^2+1$
$\Rightarrow x_2^2 = x_1^2$

$\Rightarrow |x_2| = |x_1|$

إذن f غير متباين فهو ليس تقابلي .

- g متباين :

$\forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow 3x_1-7 = 3x_2-7$
$\Rightarrow 3x_1 = 3x_2$
$\Rightarrow x_1 = x_2$ | متباين في **R**
ومنه g

- g غامر:

$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} / g(x) = y$

$\Rightarrow 3x-7 = y$

$\Rightarrow 3x = y+7 \Rightarrow x = (y+7)/3$ و g غامر
منه

g متباين و غامر فهو تقابلي.

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

2- احسب (fog) (1) ؟

$fog\ (x) = f[g(x)]$

$= f[3x-7]$

$= 1/[(3x-7)^2+1]$

$fog(1) = 1/[(3\times 1-7)^2+1]$

$= 1/[(-4)^2+1]$

$= 1/(16+1)$

$= 1/17$

$(fog)(\sqrt{2}) = 1/[(3\sqrt{2}-7)^2+1]$

$= 1/[(3\sqrt{2})^2-6\sqrt{2}\times 7+49+1]$

$= 1/[18-42\sqrt{2}+50]$

$= 1/[68-42\sqrt{2}]$

$(gof)(x) = g[f(x)]$

$= g[1/(x^2+1)]$

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

$= 3\ [1/(x^2 +1)]-7$

$= 3/[\ (x^2+1)]-7$

$(g\ o f\ )\ (1/2) = 3/\ [(1/2)^2 + 1)]-7$

$=3/[(1 / 4 +1)]-7$

$=3/[(1+ 4)/ 4)]-7= 3/(5/4)-7= 3\times 4/5-7=12/5-7$

$= (12-35)/5 = -23/5.$