الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التكوين والتعليم المهنيين
Ministère de la Formation et de l'Enseignement Professionnels

Centre National de la Formation et de l'Enseignement Professionnels à Distance (CNFEPD)

المركز الوطني للتكوين و التعليم المهنيين عن بعد
(م. و. ت.ت. م.ب)

درس في الرياضيات المالية
السلسلة رقم 04

الدرس رقم 01: الدفعات في نهاية (آخر) المدة

الهدف من الدرس: في نهاية هذا الدرس على المتربص أن يكون قادرا على حساب الدفعات الثابتة في نهاية المدة.

خطة الدرس:

I. عموميات

1. تعريف
2. تخصيص الدفعات
3. أنواع الدفعات

II. القيمة المكتسبة لسلسلة من الدفعات الثابتة في نهاية المدة

1. صياغة قاعدة الرسملة
2. استعمال صيغة الرسملة

III. القيمة الحالية لسلسلة من الدفعات الثابتة في آخر المدة

1. صياغة عبارة التحيين
2. استعمال قانون القيمة الحالية
3. تقييم سلسلة الدفعات في زمن ما و حساب مدة الاستحقاق المتوسطة

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

I- عموميات:

1- التعريف:

يقصد بالدفعات، المبالغ المستحقة الدفع في فترات زمنية منتظمة (ثابتة)

مثال: كل شهر، كل شهرين، كل سداسي، كل عام...

الفاصل الزمني بين سداد دفعتين متتاليتين يدعى "المدة".

يمكن أن تكون هذه المدة:

- سنة؛
- سداسي؛
- ثلاثي؛
- شهر.

في هذه الحالة نحن نتحدث عن:

- دفعة سنوية؛
- دفعة سداسية؛
- دفعة ثلاثية (فصلية)؛
- دفعة شهرية.

مثال:

يشكل الاهتلاك الثابت لأي استثمار دفعة.

2- تخصيص الدفعات:

يمكن أن تدفع الدفعات لهدفين أساسيين هما:

- إما بهدف تكوين رأسمال، وهي دفعات توظيف أو استثمار؛
- إما بهدف سداد دين، وهي دفعات اهتلاك أو تعويض.

3- أنواع الدفعات:

تصنف الدفعات بطرق مختلفة:

1.3-حسب تاريخ السداد: يمكن أن تسدّد الدفعات إما:

- في بداية الفترة أو في أول كل فترة زمنية (مثلا في بداية كل شهر)، في هذه الحالة، يتم دفع الدفعة الأولى بمجرد إبرام العقد و هو الحال عموما فيما يخص دفعات التوظيف.
- في نهاية المدة أو الفترة (مثلا في نهاية كل فصل)، و هي حالة دفعات السداد أو الاستثمار حيث تتم الدفعة الأولى في نهاية الفترة الأولى.

2.3-حسب عدد الدفعات:

- يحدد عدد الدفعات في العقد، و في هذه الحالة تعتبر **الدفعات مؤقتة.**

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

- يكون عدد الدفعات لا نهائي و تسمى هذه الدفعات **بالدفعات الدائمة.**

مثال: المعاشات الدائمة، المعاشات على مدى الحياة.

3.3-حسب تغير الدفعات: يمكن أن تكون الدفعات ثابتة

مثال: الإيجارات من المستأجر إلى المالك يمكن أن تكون الدفعات متغيرة

مثال: النتائج الصافية لاستثمار مؤسسة في هذا الدرس سنتطرق إلى الدفعات الثابتة في نهاية المدة.

II- القيمة المكتسبة لسلسلة من الدفعات الثابتة في نهاية المدة:

لقد تطرقنا في السابق إلى مفهوم القيمة المكتسبة والفوائد المركبة. في درسنا هذا يبقى مبدأ الرسملة نفسه بينما يبرز الاختلاف في أن المجاميع الواجب رسملتها تكون ثابتة.

1- صياغة قاعدة الرسملة:

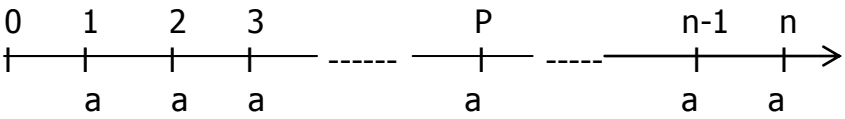
لنرمز بـ:

a : قيمة الدفعة

n: عدد الدفعات

t : معدل الفائدة

A : القيمة المكتسبة لجملة الدفعات في الفترة "n " أو عند سداد الدفعة الأخيرة.



a: القيمة المكتسبة

ملاحظة:

في الفترة صفر (0) لا يحصل أي دفع لأن الدفعة الأولى تتم في نهاية الفترة الأولى، أي في الفترة 1.

القيمة المكتسبة بعد عدد من الدفعات في المدة n تساوي مجموع القيم المكتسبة لكل دفعة من الدفعات في هذه المدة n .

الدفعة المكتسبة في المدة n هي :

- الدفعة الأولى : $a\ (1+t)^{n-1}$
- الدفعة الثانية : $a\ (1+t)^{n-2}$
- الدفعة الثالثة : $a\ (1+t)n-3$
  .....
- الدفعة p : $a\ (1+t)^{n-p}$
  .....
- الدفعة (n-1) : $a\ (1+t)$
  الدفعة n : a

ملاحظة:

لا توجد فائدة في الدفعة الأخيرة، لأن حساب القيمة المكتسبة يتم أثناء السداد في النهاية يمكن كتابة:

$$A = a + a(1+t) + a(1+t)^2 + \ldots\ldots + a(1+t)^{n-2} + a(1+t)^{n-1}$$

تشكل A مجموع متتالية هندسية ذات n حد، أساسها $(1 + t)$ وحدها الأول "a".

تذكير:

لدينا:

$$S = U_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

حيث $U_1 = a$ ، $r = (1 + t)$

منه:

$$A = a \frac{(1+t)^n - 1}{(1+t) - 1} \Longleftarrow$$

$$\boxed{A = a \frac{(1+t)^n - 1}{t}}$$

مثال:

أحسب القيمة المكتسبة بعد 12 دفعة في نهاية المدة لـ 10 000 دج لكل دفعة بمعدل 5,5%

$a = 10\,000$ ، $n = 12$ ، $t = 5,5\%$

لدينا:

$$A = 10\,000 \frac{(1,055)^{12} - 1}{0,055} \quad \Rightarrow \quad A = a \underbrace{\frac{(1+t)^n - 1}{t}}$$

هذا المقدار حسب الجدول المالي III يمكن قراءة

$$A = 10\,000 \times 16,385591 = \underline{163\,855,91}$$

$$\boxed{A = 16\,3855,91}$$

شرح :

إذا وضعنا في بنك مبلغ مالي قدره 10 000 دج كل سنة لمدة 12 عام بمعدل فائدة قدره 5,5% ، فإننا نتحصل في العام الثاني عشر (أثناء دفع الدفعة الأخيرة) على المقدار 163855,91 دج (جملة الدفعات + الفائدة المكتسبة).

2- استعمال صيغة الرسملة:

لننطلق من العبارة الأساسية $A = a\frac{(1+t)^n - 1}{t}$ التي تشمل أربعة مجاهيل: A, a, t ,n

إذا كانت ثلاث متغيرات من بين الأربعة معروفة فإنه يمكن لنا أن نحسب المتغير الرابع.

1.2-حساب الدفعة «a»:

لدينا: $A = a\frac{(1+t)^n - 1}{t} \Longrightarrow a = A \frac{t}{(1+t)^n - 1}$

نلاحظ أن الجداول المالية المستعملة لا تعطي قيمة الصيغة: $\frac{t}{(1+t)^n - 1}$

و لكنها تعطي قيمة لصيغة أخرى: $\frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$ في الجدول رقم V

لنحسب الفرق بين العبارتين:

$$\frac{t}{1-(1+t)^{-n}} - \frac{t}{(1+t)^n - 1} = \frac{t(1+t)^n}{(1+t)^n - 1} - \frac{t}{(1+t)^n - 1} = \frac{t(1+t)^n - t}{(1+t)^n - 1} = \frac{t\left[(1+t)^n - 1\right]}{(1+t)^n - 1} = t$$

إذن يمكننا الحصول على قيمة $\frac{t}{(1+t)^n - 1}$ بقراءة في الجدول القيمة $\frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$ المطابقة للزمن و المعدل المعطيين ننقص من هذا المقدار المحصل عليه قيمة «t» .

مثال:

كوّن رأسمال قدره 242149,20 دج بدفع 14 دفعة متساوية آخر المدة بمعدل 8% . كم كان مبلغ الدفعة؟.

الحل:

لدينا : A = 242 149,20 ; n = 14 ; t = 8% a =?

$$a = A \frac{t}{(1+t)^n - 1} \Rightarrow a = 242\ 149{,}20 \frac{0{,}08}{(1{,}08)^{14} - 1}$$

يعطي الجدول المالي رقم V $\underline{0{,}121\ 297} = \frac{0{,}08}{1-(1{,}08)^{-14}}$

إذن : $0{,}121\ 297 - 0{,}08 = 0{,}041\ 297 = \frac{0{,}08}{(1{,}08)^{14} - 1}$

$a = 242\ 149{,}20 \times 0{,}041\ 297 = 10\ 000$ DA

$\Longrightarrow$ $\boxed{a = 10\ 000}$

2.2-حساب المعدل «t»:

$$A = a\ \frac{(1+t)^n - 1}{t} \Rightarrow \frac{(1+t)^n - 1}{t} = \frac{A}{a}$$

مثال:

ما هو معدل الفائدة الذي يسمح لنا بالحصول على رأسمال قدره 150 000 دج وهذا برسملة 11 دفعة آخر مدة بمقدار 10 000 دج للدفعة؟

A = 150 000 ; a = 10 000 ; n = 11 ; t = ?

$$150\ 000 = 10\ 000\ \frac{(1+t)^{11} - 1}{t} \Rightarrow \frac{(1+t)^{11} - 1}{t} = 15$$

من الجدول المالي رقم III لدينا :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{(1{,}065)^{11} - 1}{0{,}065} = 15{,}371\ 560 \\ \\ \frac{(1{,}06)^{11} - 1}{0{,}06} = 14{,}971\ 643 \end{array}\right\} \Rightarrow 6\% < t < 6{,}5\%$$

6,5%	⇒	15,371 560	15		
6%	⇒	14,971 643	14,971 643		
0,5%	⇒	0,399 917	0,028 357	⇒	x %

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}399\ 917 \Rightarrow 0{,}5\% \\ \\ 0{,}028\ 357 \Rightarrow x\ \% \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0{,}04\%$$

منه: $t = 6\% + 0{,}04\% = 6{,}04\%$

t = 6,04%

3.2-حساب عدد الدفعات « n »:

مثال:

ما هو عدد الدفعات الثابتة (قيمة كل واحدة 10 000 دج) التي يجب دفعها من أجل الحصول على رأسمال يقدر بـ 150 000 دج بمعدل 7% ؟

(تدفع الدفعات في آخر كل مدة).

A = 150 000 : a = 10 000 : t = 7% n = ?

$$150\,000 = 10\,000\ \frac{(1{,}07)^n - 1}{0{,}07} \quad \Rightarrow \quad \frac{(1{,}07)^n - 1}{0{,}07} = 15$$

من الجدول المالي III نجد:

$$\frac{(1{,}07)^{11} - 1}{0{,}07} = 15{,}783\,599 \quad \text{و} \quad \frac{(1{,}07)^{10} - 1}{0{,}07} = 13{,}816448$$

نلاحظ أن: $13{,}816\,448 < 15 < 15{,}783\,599$

إذن $10 < n < 11$

بما أن n هو عدد الدفعات، فهو عدد صحيح، منه لدينا حالتين:

إما $n = 10$ أو $n = 11$

الحالة الأولى n = 10 :

في هذه الحالة تكون القيمة المكتسبة بعد 10 دفعات أقل من القيمة المعطاة (150 000 دج).

يكون الدفع على 10 دفعات قيمة كل منها 10 000 دج، و عند دفع الدفعة العاشرة، يجب القيام بدفع مكمل للحصول على رأسمال قدره 150 000دج.

لنحدد مبلغ هذه الدفعة المكملة:

الرأسمال المحصل عليه من دفع 10 دفعات كل منها 10 000 دج:

$$A = 10\,000 \frac{(1{,}07)^{10} - 1}{0{,}07} = 10\,000 \times 13{,}816\,448 = 138164{,}48 \text{ DA}$$

مبلغ الدفعة المكملة: $11\,835{,}52 = 138\,164{,}48 - 150\,000$ أي أنه تدفع 9 دفعات بقيمة 10 000 دج بينما يضاف للدفعة العاشرة 11835,52دج لتصبح 21835,52 دج.

الحالة الثانية n =11:

في هذه الحالة تكون القيمة المكتسبة لـ 11 دفعة أكبر من القيمة المكتسبة (150 000 دج).

وبالتالي علينا طرح الفرق المتحصل عليه من القيمتين المكتسبتين من قيمة الدفعة الأخيرة أي :

$$n = 11$$

$$10\,000\ \frac{(1{,}07)^{11} - 1}{0{,}07} = 157835{,}99$$

تزداد هذه القيمة عن القيمة المكتسبة المعطاة (150 000دج) بـ :

$$157835{,}99 - 150\,000 = 7835{,}99$$

إذن تدفع 10 دفعات بقيمة 10 000 دج و يطرح من الدفعة الأخيرة الحادي عشر المقدار 2164,01 دج.

ملاحظة:

يوجد حل ثاني يتمثل في تغيير قيمة الدفعة و اختيار قيمة n، إما n=10 أو n = 11 و هذا للحصول على قيمة مكتسبة تساوي القيمة المعطاة أي (150 000 دج).

نأخذ مثلا n = 10 :

نحسب قيمة "a" علما أن A = 150 000:

$$150\ 000 = a\ \frac{(1,07)^{10}-1}{0,07} = a\ (13,816\ 448) \Rightarrow a = 10856,63$$

إذا أخذنا n = 11، نجد a = 9503,54

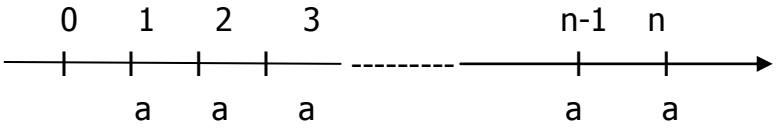
في الأخير نلاحظ أن هذا الحل يتمثل في اختيار إما:

- n = 10 دفعات بقيمة 10856,63 دج للواحدة.
- n = 11 دفعة بقيمة 9503,54 دج للواحدة.

III-القيمة الحالية لسلسلة دفعات ثابتة آخر المدة:

1- صياغة عبارة التحيين:

لتقدير القيمة الحالية لعدد من الدفعات الثابتة في آخر المدة نرجع إلى وقت إمضاء العقد، بمعنى الفترة ما بعد الدفع الأول (أي في الزمن "0").



القيمة الحالية لعدد من الدفعات تساوي مجموع القيم الحالية لكل دفعة من الدفعات.

القيمة الحالية للدفعة الأولى : $a\ (1 + t)^{-1}$

القيمة الحالية للدفعة الثانية : $a\ (1 + t)^{-2}$

القيمة الحالية للدفعة الثالثة: $a\ (1 + t)^{-3}$

.....

القيمة الحالية للدفعة (n-1) : $a\ (1 + t)^{(n-1)}$

القيمة الحالية للدفعة n : $a\ (1 + t)^{-n}$

لتكن « V_0 »القيمة الحالية لهذه الجملة من الدفعات :

$$V_0 = a\ (1 + t)^{-n} + a\ (1 + t)^{-(n-1)} + \text{-----} + a\ (1 + t)^{-2} + a\ (1 + t)^{-1}$$

يشكل V_0 متتالية هندسية متميزة بمايلي:

- الحد الأول: $a\,(1+t)^{-n}$
- الأساس: $(1+t)$
- عدد الحدود : n

منه حسب قانون مجموع متتالية هندسية نكتب:

$$V_0 = a\,(1+t)^{-n}\,\frac{(1+t)^n - 1}{(1+t)-1} = a\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

$$V_0 = a\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

ملاحظة:

يمكن الحصول على قيمة V_0 و هذا بتحيين مباشرة القيمة المكتسبة A بمعدل t و خلال n فترة. نتحصل على :

$$V_0 = A\,(1+t)^{-n}$$

2-استعمال قانون القيمة الحالية:

1.2-حساب القيمة الحالية V_0 :

مثال:

اشترت مؤسسة تجهيزا حيث يتم الدفع على 5 دفعات بمقدار 80 000 دج للدفعة. تدفع الدفعة الأولى بعد سنة من تاريخ الشراء، إذا علمت أن معدل الفائدة هو 10%.

كم تكون قيمة هذا التجهيز يوم شرائه ؟

الحل:

يجب أن تكون قيمة هذا التجهيز مساوية لجملة 5 دفعات:

إذن: $V_0 = 80\,000\;\frac{1-(1{,}10)}{0{,}010}$

باستعمال الجدول المالي رقم IV نجد أن قيمة $\frac{1-(1{,}10)^{-5}}{0{,}010}$ =3,790.787

منه :

$V_0 = 80\,000 \times 3{,}790\,787 = 303\,262{,}96$ DA

2.2-حساب قيمة الدفعة:

$$V_0 = a\,\frac{1+(1+t)^{-n}}{t} \Rightarrow a = V_0\,\frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$$

مثال:

لتسديد دين قيمته 20 000 دج يقبل المقترض أن يدفع له 4 دفعات بمعدل 8%. ما هي قيمة كل دفعة؟

الحل:

$V_0 = 20\,000$; $t = 8\%$; $n = 4$; $a = ?$

$$20\,000 = a\,\frac{1-(1{,}08)^{-4}}{0{,}08} \Rightarrow a = 20\,000\ \frac{0{,}08}{1-(1{,}08)^{-4}}$$

من الجدول المالي V نجد قيمة $\frac{0{,}08}{1-(1{,}08)^{-4}} = 0{,}301921$

$a = 20\,000 \times (0{,}301\,921) = 6\,038{,}42$ DA

3.2-حساب المعدل «t»:

مثال:

إشترى صناعي عتاد بمبلغ 255 000 دج الذي يجب أن يدر عليه خلال 5 سنوات بفوائد صافية تقدر بـ 000 60 دج. علما أن القيمة المتبقية لهذا العتاد بعد 5 سنوات معدومة، و أن الفوائد تقدر في نهاية السنة. ما هو المعدل الذي تحقق به الاستثمار؟

الحل:

$Vo = 255\,000$; $n = 5$; $a = 60\,000$; $t = ?$

$$Vo = a\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} \Rightarrow \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = \frac{Vo}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{1-(1+t)^{-5}}{t} = \frac{255000}{60000} = 4{,}25$$

باستعمال الجدول المالي رقم III نجد $5{,}5\% < t < 6\%$

$t = 5{,}5\% \longrightarrow 4{,}270\,284 \longrightarrow 4{,}270\,284$

$t = 6\% \longrightarrow 4{,}212\,364 \longrightarrow 4{,}25$

$0{,}5\% \longrightarrow 0{,}057\,920 \longrightarrow 0{,}020\,284 \longrightarrow x\ \% \longrightarrow$

$$t = 5{,}5\% + \frac{0{,}5\% \times 0{,}020284}{0{,}057920} = 5{,}67\%$$

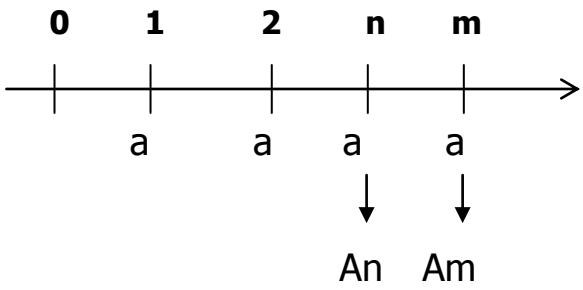
4.2-حساب عدد الدفعات:

nهو عدد الدفعات، و هو عدد صحيح، سنتطرق إلى نفس الحالات التي رأيناها في عبارة القيمة المكتسبة.

3- تقييم سلسلة دفعات في زمن ما و حساب مدة الاستحقاق المتوسطة:

1.3-تقييم في زمن ما:

أ- تقييم في زمن "m" حيث m >n :

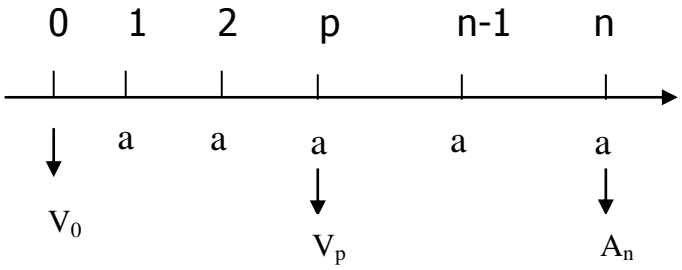


حيث: An: القيمة المكتسبة في زمن n

Am: القيمة المكتسبة في زمن m

$$Am = An\,(1+t)^{m-n}$$

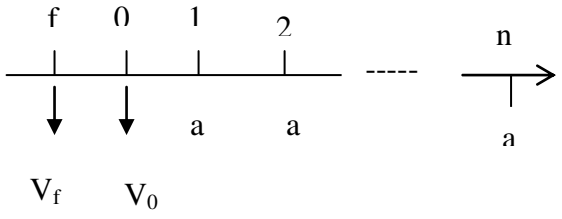
ب- تقييم في زمن "p " حيث 0< p< n :



يمكن أن تحسب Vp (قيمة الدفعات في الزمن p) بدلالة V_0 أو A_n.

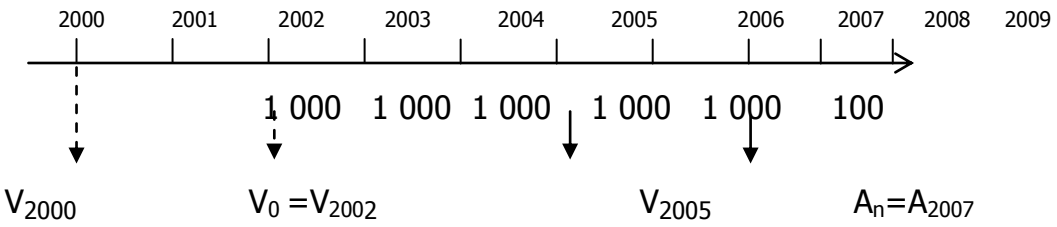
$$V_p = V_o\,(1+t)^{p}$$ أو $$V_p = A_n\,(1+t)^{-(n-p)}$$

ج-تقييم في زمن "f " حيث f < 0 :



$$Vf = Vo\,(1+t)^{-f}$$

مثال:



أحسب: A_{2007} ; V_{2005} ; V_{2000}علما أن t= 10 % .

الحل:

لنحسب أولا V_0 أو V_{2002} و A_n أو A_{2007}

$$V_{2002} = 1000\ \frac{1-(1{,}10)^{-5}}{0{,}10} = 3\ 790{,}78$$

$$A_{2007} = 1000\frac{(1{,}10)^{5}-1}{0{,}10} = 6105{,}10$$

$$V_{2000} = V_{2002}\ (1+t)^{-2} = 3\ 790{,}78\ (1{,}10)^{-2} = 3\ 132{,}87$$

$$V_{2005} = V_{2002}\ (1+t)^{3} = 3\ 790{,}78\ (1{,}10)^{3} = 5\ 045{,}54$$

$$V_{2005} = A_{2007}\ (1+t)^{-2} = 6\ 105{,}10\ (1{,}10)^{-2} = 5\ 045{,}54$$

$$A_{2009} = A_{2007}\ (1+t)^{2} = 6\ 105{,}10\ (1{,}10)^{2} = 7\ 387{,}17$$

2.3-مدة الاستحقاق المتوسطة لسلسلة دفعات ثابتة آخر المدة:

تعتبر مدة الاستحقاق المتوسطة لسلسلة دفعات ثابتة آخر المدة، التاريخ الذي تكون فيه القيمة المكتسبة لهذه السلسلة يساوي مجموع الدفعات الحقيقية.

الدفعات الحقيقية = n×a .

لتكن x مدة الاستحقاق المتوسطة، القيمة المكتسبة في زمن x هي :

$$Ax = V_o\ (1+t)^x$$

عند مدة الاستحقاق: $n\times a = V_o\ (1+t)^x$

نعلم أن :

$$V_o = a\ \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} \quad \Rightarrow \quad n\times a = a\ \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}(1+t)^x$$

$$(1+t)^x = n\ \frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$$

ملاحظة:

نلاحظ أن مدة استحقاق لسلسلة من دفعات تكون مستقلة عن مقدار الدفعة.

مثال:

أحسب مدة الاستحقاق لـ 10 دفعات ثابتة حتى آخر المدة، علما أن t=6%.

الحل:

لتكن x مدة الاستحقاق المتوسطة:

$(1,06)^x = 10 \times 0,135868 = 1,358\ 680$ $\qquad (1,06)^x = 10\ \frac{0,06}{1-(1,06)^{-10}} \Rightarrow$

باستعمال جدول المالي I ، نجد $5 < x < 6$ سنوات

1,358 680	1,418519	$x = 6$ سنوات $\Rightarrow$
1,338 226	1,338 226	$x = 5$ سنوات $\Rightarrow$
y $\Rightarrow$ 0,020 454	0,080 293	12 شهر $\Rightarrow$

$y = \frac{12 \times 0,020454}{0,080293} \approx$ 3أشهر

مدة الاستحقاق تساوي: 5 سنوات و 3 أشهر.

الدرس رقم 02: الدفعات الثابتة "بداية المدة"

الهدف من الدرس: في نهاية هذا الدرس على المتربص أن يكون قادرا على حساب الدفعات الثابتة في بداية المدة.

خطة الدرس:

مـقدمة

I- القيمة المكتسبة لسلسلة دفعات ثابتة "بداية المدة"

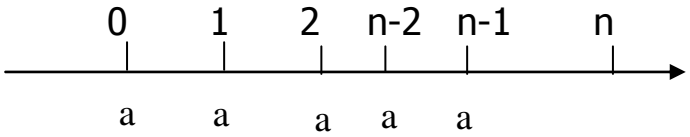
II- القيمة الحالية لسلسلة دفعات ثابتة "بداية المدة"

مـقدمة:

تطرقنا في الدرس الأول إلى الدفعات "آخر المدة" حيث تكون الدفعة في آخر السنة الأولى من إمضاء عقد التسديد أو التوظيف.

في درسنا هذا سندرس الدفعات "بداية المدة" حيث تكون أول دفعة في الفترة صفر "0" أي مع بداية إمضاء عقد التسديد أو التوظيف.

نتحصل على الشكل البياني التالي :

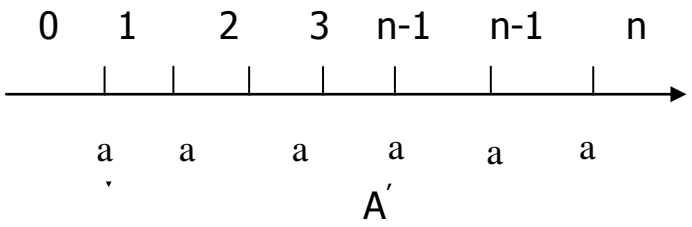


ملاحظة:

1- في سنة n لا يحصل أي تسديد لأن دفعة هذه السنة تكون في البداية أي في تاريخ "n-1"؛

2- دفعات "بداية المدة" خاصة أكثر بدفعات التوظيف حيث أن أول توظيف يكون متزامن مع إمضاء العقد.

I- القيمة المكتسبة لسلسلة دفعات ثابتة بداية المدة :



القيمة المكتسبة A لسلسلة دفعات تساوي مجموع القيمة المكتسبة لكل دفعة لكي نتحصل على هذه القيمة، نبدأ من السنة n (مثل دفعات آخر مدة).

-القيمة المكتسبة لأول دفعة : $a\,(1+t)^n$

-لقيمة المكتسبة لثاني دفعة : $a\,(1+t)^{n-1}$

-القيمة المكتسبة لثالث دفعة : $a\,(1+t)^{n-2}$

.....

-القيمة المكتسبة ما قبل آخر الدفعة : $a\,(1+t)^2$

-القيمة المكتسبة لآخر الدفعة : $a\,(1+t)$

$$A' = a\,(1+t) + a\,(1+t)^2 + \text{-----} + a\,(1+t)^{n-1} + a\,(1+t)^n$$

يشكل A′ مجموع متتالية هندسية أساسها $(1+t)$، حدها الأول $a\,(1+t)$ و عدد حدودها n.

$$S = u_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

منه:

$$A' = a\,(1+t)\,\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

$$\boxed{A' = a\,\frac{(1+t)^n - 1}{t}\,(1+t)}$$

ملاحظة:

لنقارن هذه القيمة المكتسبة لسلسلة دفعات ثابتة بداية المدة مع القيمة المكتسبة لسلسلة دفعات ثابتة آخر المدة :

$$\left.\begin{array}{l} A = a\,\dfrac{(1+t)^n - 1}{t} \\ A' = a\,\dfrac{(1+t)^n - 1}{t}\,(1+t) \end{array}\right\} \longrightarrow A' = A\,(1+t)$$

مثال رقم 01:

وظفنا مبلغ 10 000 دج مع بداية كل سنة و على مدى 10 سنوات، ما هي القيمة المكتسبة في السنة 10 (سنة بعد آخر توظيف) بمعدل 5%؟

الحل:

a = 10 000 ; t = 5% n = 10 ; A′ = ?

$$A' = a \frac{(1+t)^{10}-1}{t}(1 + t) = 10\,000 \frac{(1{,}05)^{10}-1}{0{,}05} (1{,}05)$$

A′ = 10 000 (12,577 983) (1,05) = <u>132 067,87</u>

مثال رقم 02:

توظيف 10 دفعات ثابتة "بداية المدة" بمقدار 10 000 دج لكل دفعة، يسمح بتكوين رأس مال في آخر السنة العاشرة يعادل 139.716,43 دج.

ما هو معدل التقييم الحالي المستعمل ؟

A′ = 139 716,43 n =10 ; a = 10 000 t = ?

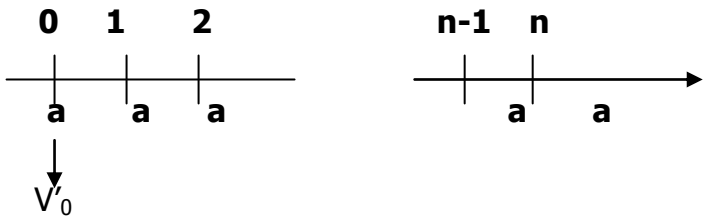
$$139\,716{,}43 = \frac{(1+t)^{10}-1}{t} (1+ t) \times 10\,000$$

$$\Rightarrow \frac{(1+t)^{10}-1}{t} (1 +t) = 13{,}971\,643$$

$$\Rightarrow \frac{(1+t)^{11}-1}{t} -1 = 13{,}971\,643 \Rightarrow \frac{(1+t)^{11}-1}{t} = 14{,}976\,643$$

من الجدول المالي رقم II نجد : t=6%

II- القيمة الحالية لسلسلة دفعات ثابتة بداية المدة V'_0 :



للحصول على القيمة الحالية لهذه السلسلة من الدفعات، ننطلق من المرحلة 0 أي تاريخ أول دفعة.

القيمة الحالية لهذه السلسلة من الدفعات، تساوي مجموع القيم الحالية لكل دفعة.

-القيمة الحالية لأول دفعة : a

-القيمة الحالية لثاني دفعة : $a\,(1+t)^{-1}$

-القيمة الحالية لثالث دفعة: $a\,(1+t)^{-2}$

.....

- القيمة الحالية لآخر دفعة : $a\,(1+t)^{-(n-1)}$

$$V'_0 = a + a\,(1+t)^{-1} + a\,(1+t)^{-2} + \text{----------} + a\,(1+t)^{-(n-1)}$$

V'_0 يشكل مجموع متتالية هندسية ذات n حد، أساسها $(1+t)^{-1}$ وحدها الأول a. $s = u_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$

منه :

$$V'_0 = a\,\frac{(1+t)^{-n} - 1}{(1+t)^{-1} - 1}$$

نضرب هذا البسط و المقام في $(1+t)$:

$$V'_0 = a\,\frac{(1+t)^{-n} - 1}{(1+t)^{-1} - 1} \times \frac{(1+t)}{(1+t)} \Rightarrow V'_0 = a\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\,(1+t)$$

بمقارنة القيمة الحالية لسلسلة دفعات بداية المدة مع القيمة الحالية لسلسلة دفعات آخر المدة :

$$\left.\begin{array}{l} V'_0 = a\,\dfrac{1-(1+t)^{-n}}{t} \\ V'_0 = a\,\dfrac{1-(1+t)^{-n}}{t}\,(1+t) \end{array}\right\} \Rightarrow V'_0 = V_0\,(1+t)$$

مثال رقم 01:

ما هي القيمة الحالية لـ 8 دفعات ثابتة، مبلغ كل واحدة يساوي 10 000 دج، الأولى تستحق في الحين بمعدل 5% ؟

الحل:

$A = 10\,000$; $t = 5\%$; $n = 8$; $V'_0 = ?$

$$V'_0 = a\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\,(1+t) \Rightarrow V'_0 = 10\,000\,\frac{1-(1{,}05)^{-8}}{0{,}05}\,(1{,}05)$$

$V'_0 = 10\,000\,(6{,}463\,213)\,(1{,}05) = \underline{67\,863{,}74}$

مثال رقم 02:

يسدد قرض 20 000 دج على 5 دفعات ثابتة وبمعدل 10% أول دفعة مع بداية العقد (عند الحصول على القرض).

ما هي قيمة كل دفعة؟

الحل:

V'o = 20 000 t = 10% n = 5 ; a = ?

$V'o = a \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} (1+t) \Rightarrow 20\,000 = a \frac{1-(1,10)^{-5}}{0,10} (1,10)$

20 000 = a (3,790 787) (1,10) = a (4,169 866)

$\Rightarrow$ a = 4 796,31