الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التكوين والتعليم المهنيين
Ministère de la Formation et de l'Enseignement Professionnels

Centre National de la Formation et de l'Enseignement Professionnels à Distance (CNFEPD)

المركز الوطني للتكوين و التعليم المهنيين عن بعد
(م. و. ت.ت. م.ب)

درس في الرياضيات المالية

السلسلة رقم 03

الدرس رقم 01: تكافؤ رؤوس الأموال حسب الفوائد المركبة

الهدف من الدرس: في نهاية هذا الدرس على المتربص أن يكون قادرا على:

- تعريف تكافؤ رؤوس الأموال حسب الفوائد المركبة
- تطبيق تكافؤ الفوائد المركبة.

خطة الدرس:

I - تعريف

1-تكافؤ رأسمالان
2-تكافؤ رأس مال مع مجموعة رؤوس أموال
3-تكافؤ مجموعتين من رؤوس الأموال

II - نظرية

III - تطبيقات التكافؤ بالفوائد المركبة

1-حساب الإستحقاق المشترك
2-حساب الإستحقاق المتوسط
3-تطبيق على حساب مردودية الإستثمار

I - تعريف:

إن تكافؤ رؤوس الأموال حسب الفوائد المركبة يعرف بنفس شروط الفوائد البسيطة مع تساوي القيم الحالية.

1- تكافؤ رأسمالان:

إن تكافؤ رأسمالان حسب الفوائد المركبة، يتم في تاريخ ما، إذا كانت قيمتها المالية هي نفسها في ذلك التاريخ.

ليكن C_1 ،C_2 رأسمالان يستحقان على التوالي في المدة n_1 و n_2 بمعدل t . يكون هذان الرأسمالان متكافئان في الوقت صفر (في الوقت الحالي)، إذا تمكننا من كتابة ما يلي:

القيمة الحالية لـ C_1 = القيمة الحالية لـ C_2

أو $\boxed{C_1 (1+t)^{-n1} = C_2 (1+t)^{-n2}}$

2- تكافؤ رأس مال مع مجموعة رؤوس أموال:

يتم تكافؤ رأسمال بفوائد مركبة، وفي تاريخ معين مع مجموعة من رؤوس الأموال، إذا كان هذا الرأسمال الوحيد ينتج أو (يغطي) قيمة حالية مثل التي تنتجها هذه المجموعة من رؤوس الأموال في ذلك التاريخ.

ليكن Cرأس مال يستحق في نهاية nفترة، و ليكن C_3، C_2 ، C_1 مجموعة رؤوس الأموال التي تستحق في عدد من الفترات هي على التوالي : n_1 ، n_2 ، n_3 .

يكون رأس المال C مكافئا لرؤوس الأموال C_1 ، C_2، C_3حسب المعدل t ، إذا يمكننا أن نكتب :

القيمة الحالية C = مجموع القيم الحالية لـ C_1 ، C_2 ، C_3 .

أو: $\boxed{C (1+t)^{-n} = C_1 (1+t)^{-n} + C_2 (1+t)^{-n2} + C_3 (1+t)^{-n3}}$

3- تكافؤ مجموعتين من رؤوس الأموال:

تتكافأ مجموعتان من الأوراق، حسب الفوائد المركبة في تاريخ معين، إذا كانت القيمة الحالية للمجموعة الأولى تساوي القيمة الحالية للمجموعة الثانية (يكون حساب القيم الحالية بنفس المعدل).

- ليكن: A_1 ، A_2 ، A_3 مجموعة الأوراق التي تستحق في عدد من الفترات، هي على التوالي n_1 ، n_2 ، n_3 .
- ليكن: B_1 ، B_2 ، مجموعة ثانية من الأوراق تستحق في عدد من الفترات هي على التوالي m_1 ، m_2 .

تكون مجموعة الأوراق الأولى (A_1، A_2، A_3) مكافئة لمجموعة الأوراق الثانية (B_1، B_2) إذا كان:

$$\boxed{A_1 (1+t)^{-n1} + A_2 (1+t)^{-n2} + A_3 (1+t)^{-n3} = B_1 (1+t)^{-m1} + B_2 (1+t)^{-m2}}$$

II -نظرية:

بالنسبة للفوائد المركبة إذا حدث تكافؤ بتاريخ معين حسب المعدل t، فإن هذا التكافؤ يحدث دائما (يحدث التكافؤ في أي تاريخ).

البرهان:

ليكن C_1 و C_2 ورقتان تستحقان على التوالي في n_1 و n_2 فترة على أساس المعدل t

فإذا تكافأت هاتان الورقتان في الوقت صفر (الوقت الحالي)، يمكننا أن نكتب:

$$C_1 (1+t)^{-n1} = C_2 (1+t)^{-n2}$$

لنفرض أننا في وقت يختلف عن الوقت صفر بمقدار "p" فترة (قبله أو بعده) (p هو أي عدد من الفترات، يمكن أن يكون موجبا أو معدوما أو سالبا) وبالتالي نحصل على:

$$C_1 (1+t)^{-(n_1 - p)} = C_2 (1+t)^{-(n_2-p)}$$

III - تطبيقات التكافؤ بالفوائد المركبة:

1- حساب الإستحقاق المشترك:

مثال: حدد تاريخ إستحقاق دين وحيد بمبلغ 50 000 دج، تم عقده لتعويض ثلاثة ديون هي:

- 10 000 دج تستحق في 6 أشهر؛
- 18 000 دج تستحق في 18 شهرا؛
- 20 000 دج تستحق في 30 شهرا.

علما بأن المعدل يبلغ 2,5 % لكل سداسي.

الحل:

لنفرض أن "n" هو تاريخ إستحقاق الدين الوحيد الذي يعوض الديون الثلاثة الأخرى، التي تستحق على التوالي في n_1 ، n_2 ، n_3 .

يجب التعبير عن الإستحقاق n_1، n_2 ، n_3 سداسيا لأن المعدل معطى سداسيا (يجب معالجة المسائل دائما حسب نفس النظام فإذا كان المعدل سنويا يجب أن تكون الفترة سنوية و إذا كان المعدل سداسيا يجب أن تكون المدة سداسية ، و هكذا دواليك).

- n_1 = 1 سداسي ؛
- n_2 = 3 سداسيات ؛
- n_3 =5 سداسيات.

لكي يعوض الدين الوحيد الذي يبلغ 50 000 دج الديون الثلاثة الأخرى يجب أن يكافئ هذه الديون بمعدل 2 ,5 % سداسيا، وبتعبير آخر يجب أن يكون:

$$50\,000\,(1{,}025)^{-n} = 10\,000\,(1{,}025)^{-1} + 18\,000\,(1{,}025)^{-3} + 20\,000\,(1{,}025)^{-5}$$

$$\longrightarrow \quad (1{,}025)^{-n} = 0{,}882\,9$$

ومن الجدول المالي نحصل على:

$5 < n < 6$ سداسيات $\Leftarrow$ $n \approx$ 5 سداسيات

2- حساب الإستحقاق المتوسط:

يحسب الإستحقاق المتوسط في الحالة التي تكون فيها القيمة الإسمية للورقة (ورأس المال) المعوضة مساوية لمجموع القيم الإسمية للأوراق (رؤوس الأموال) المعوضة (نفس المبدأ الخاص بالإستحقاق المتوسط على أساس الفوائد البسيطة).

لنسترجع المثال السابق ولنفترض تعويض الأوراق الثلاثة بورقة قيمتها الإسمية48 000

(48 000 = 10 000 + 18 000 + 20 000) ما هو الإستحقاق المتوسط لهذه الورقة؟

ليكن هذا الإستحقاق هو x :

$$48\,000\,(1{,}025)^{-x} = 10\,000\,(1{,}025)^{-1} + 18\,000\,(1{,}025)^{-3} + 20\,000\,(1{,}025)^{-5}$$

$$1{,}025^{-x} = 0{,}919749$$

و من الجدول المالي II نجد أن : $3 < x < 4$ سداسيات .

X = 3	0,928 599	0,928 599
	-	-
X = 4 ⟶	0,905 951	0,919 749

1 سداسي = 6 شهر ⟶ 0,022 648 0,008 850 ⟶ y شهر

$$y = \text{شهران و } 2/1 = \frac{6 \times 0{,}008850}{0{,}022648}$$

- 6 أشهر ⟵ 0 ,022648
- Y أشهر ⟵ 0.008 850

وأخيرا

X= 3 سداسيات ، شهران و 15 يوما

3- تطبيق على حساب مردودية الإستثمار:

مثال: للمؤسسة إمكانية الإختيار بين آلتينA وB

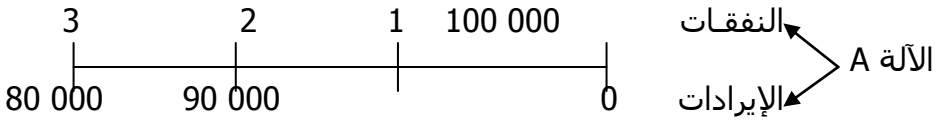
- الآلة A: كلفتها 100 000 دج، وهي تعطي دخلا قدره 90 000 دج في سنتين، ودخلا قدره 80 000 دج في ثلاثة سنوات.
- الآلة B: كلفتها 100 000 دج، والدخل الذي تعطيه هو 80 000 دج في سنتين و90 000 دج في ثلاثة سنوات.

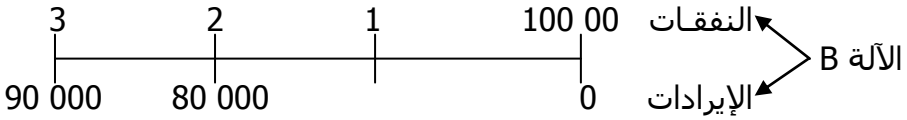
- ما هي الألة التي تختارها هذه المؤسسة علما بأن معدل الخصم هو 10 % ؟

الحل:

يلزم في هذه الحالة حساب الربح الحالي الصافي لكل آلة لكي يمكن إجراء مقارنة بين هذين الربحين ، و إختيار الآلة التي تعطي أكبر ربح.

الربح الحالي الصافي يساوي الإيرادات الحالية (الوقت صفر) ناقص النفقات الحالية.





الآلة A :

- النفقة الحالية = 100 000 دج
- الإيراد الحالي= 90 000 $(1,1)^{-2}$ + 80 000 $(1,1)^{-3}$
- الربح الحالي= 90 000 $(1,1)^{-2}$ + 80 000 $(1,1)^{-3}$ – 100 000

= 90 000 (0,826 446) + 80 000 (0,751 315) -100 000

= 74 380,14 + 60 105,20 - 100 000

الربح الحالي = **34 485,34** دج

الآلة B:

- النفقة الحالية = 100 000 دج
- الإيراد الحالي = 80 000 $(1,1)^{-2}$ + 90 000 $(1,1)^{-3}$
- الربح الحالي = 80 000 $(1,1)^{-2}$ + 90 000 $(1,1)^{-3}$ – 100 000

= 80 000 (0,826 446) + 90 000 (0,751 315) -100 000

= 66 115,68 + 67 618,35 - 100 000

الربح الحالي = **33 734 ,03** دج

إذن: للمؤسسة أن تختار الآلة**A** لأنها هي التي تدر أكبر ربح حالي

الدرس رقم 02: المتتاليات الحسابية والمتتاليات الهندسية

الهدف من الدرس: في نهاية هذا الدرس على المتربص أن يكون قادرا على تعريف وحساب المتتاليات الحسابية والهندسية.

خطة الدرس:

مقدمة

I - المتتاليات الحسابية

1- تعريف
2- قيمة الحد النوني " n"
3- دراسة متتالية حسابية ذات "n " حد

II - المتتاليات الهندسية

1- تعريف
2- قيمة الحد النوني "n "
3- دراسة متتالية هندسية ذات n " حد

مقدمة:

إن هذا الدرس الذي يتناول المتتاليات الحسابية والمتتاليات الهندسية لا يتطرق مباشرة إلى العمليات المالية، لكنه يسهل دراسة بقية البرامج التي تعالج الدفعات السنوية واختيار الإستثمارات والقروض.

ولهذا الدرس، الذي شكل أداة للبرهان، فائدة كبرى تتمثل في القدرة على فهم بقية البرنامج، و لهذا يجب دراسته بكل إهتمام، و حل جميع التمارين التي يقترحها.

I - المتتالية الحسابية:

1- تعريف:

" المتتالية الحسابية " هي أعداد متتالية ومرتبة بحيث يمكن الحصول على أي عدد منها بإضافة عدد ثابت (r) نسميه " أساس " إلى العدد الذي قبله.
لتكن المتتالية الحسابية التالية: $U_1, U_2, U_3, U_{n-1}....U_n$

وكل حد من هذه الحدود يمكن الحصول عليه كما يلي:

$U_2 = U_1 + r$
$U_3 = U_2 + r$
$U_4 = U_3 + r$
.....
$U_n = U_{n-1} + r$

مثال:

- 4 ،7 ،10 ،13 هي متتالية حسابية، عدد حدودها أربعة، وأساسها r =3

- 1، 4، 9، 14، 19،24 هي متتالية حسابية، عدد حدودها ستة وأساسها r=-5

ملاحظات:

أ-عند قراءة متتالية حسابية في إتجاه معاكس (من الحد الأخير إلى الحد الأول؛ من المثال السابق نحصل على الأعداد: 13 ،10 ،7 ،4) نحصل على متتالية حسابية يكون أساسها معكوس أساس متتالية السابقة.

ب-المتتالية الحسابية التي أساسها "r" تكون:

- متتالية متزايدة إذا كان $r > 0$ ، مثال : 2 ،4 ،6 ،8....
- متتالية متناقصة إذا كان $r < 0$ ، مثال : 9 ، 6 ،3 .....
- متتالية ثابتة إذا كان $r = 0$ بحيث: $U_1 = U_2 = U_3 = ... = U_{n-1} = U_n$

2- قيمة الحد النوني n:

لتكن متتالية حسابية، عدد حدودها "n"، وأساسها «r" معرفة كما يلي:

$U_1, U_2, U_3.....U_{n-1}, U_n$.

لدينا:

$U_2 = U_1 + r$
$U_3 = U_2 + r = U_1 + r + r = U_1 + 2r$
$U_4 = U_3 + r = U_1 + 2r + r = U_1 + 3r$
--- ----------
$U_p = U_{p-1} + r = U_1 + (p-1)r$
$U_n = U_{n-1} + r = U_1 + (n-1)\,r$

ومنه نستنتج القاعدة التالية:

$$\mathbf{U_n = U_1 + (n-1)\,r^3}$$

مثال:
لتكن متتالية حسابية أساسها 4، وحدها الأول 10، أحسب الحد الثالث، و الثامن و الخامس عشر.

الحل:
- الحد الثالث: $U_3 = U_1 + (3-1)\,r = 10 + 2 \times 4 = 18$
- الحد الثامن: $U_8 = U_1 + 7r = 10 + 7 \times 4 = 38$
- الحد الخامس عشر: $U_{15} = U_1 + 14r = 10 + 14 \times 4 = 66$

3- دراسة المتتالية الحسابية المتكونة من "n" حد:

لتكن المتتالية الحسابية، التي عدد حدودها "n " و أساسها " r" وحدها الأول "U_1 " .

$U_1, U_2, U_3 \ldots\ldots U_p, U_{n-1}, U_n$

- U_1, U_n: هما الحدان المتطرفان في هذه المتتالية.
- كل الحدود الأخرى U_2 إلى U_{n-1}، نسميها " متوسطات حسابية".

1.3-حساب الأساس بمعرفة الحدين المتطرفين:

نعلم أن: $U_n = U_1 + (n-1)\,r$

$$\mathbf{r} = \frac{U_n - U_1}{n-1}$$

مثال رقم 01:

أحسب أساس المتتالية الحسابية التي تتكون من 08 حدود، و حدها الأول هو 5، و حدها الأخير هو 26.

لدينا : $U_1=5$ ، $U_n=26$ ، $n=8$

$$\mathbf{r} = \frac{U_n - U_1}{n-1} = \frac{26-5}{8-1} = \frac{21}{7} = \mathbf{3}$$

حدود هذه المتتالية هي: 5، 8، 11، 14، 17، 20، 23، 26

مثال رقم 02:

ما هو أساس المتتالية الحسابية التي عدد حدودها 5، حدها الأول 55، و حدها الأخير 35 ؟

الحل:

لدينا:

$U_1 = 55, U_n = 35, \quad n = 5$

$$r = \frac{U_n - U_1}{n-1} = \frac{35-55}{5-1} = -5$$

حدود هذه المتتالية هي: 55، 50، 45، 40، 35.

2.3 – خواص الحدود المتساوية البعد عند الطرفين :

أ- تعريف:

نقول عن حدين أنهما متساويا البعد (لهما نفس البعد) عند الطرفين، إذا كان عدد الحدود التي قبل الأول يساوي عدد الحدود التي بعد الثاني.

مثال:

لتكن المتتالية: 5، 10، 15، 20، 25، 30، 35، 40.

- الحدان : 10 و 35 ، لهما نفس البعد عند الطرفين
- الحدان : 15 و 30 ، لهما نفس البعد عند الطرفين
- الحدان : 20 و 25 ، لهما نفس البعد عند الطرفين

ب- خواص:

لتكن المتتالية الحسابية التالية: $U_1, U_2, U_3, \ldots U_P, U_{n-1}, U_n$

(U_4, U_{n-3}) ,(U_3, U_{n-2}) ,(U_2, U_{n-1})هي حدود متساوية البعد عن الطرفين.
لنرمز إلى حدين لهما نفس البعد بالرمزين U_P و U_q:

$$p = q \Leftarrow \begin{cases} U_P : \text{له } p \text{ حدا قبله} \\ U_q : \text{له } q \text{ حدا بعده} \end{cases}$$

لنأخذ هذه المتتالية حسب الاتجاه:

$U_1, U_2, \ldots, U_p \ldots, U_q \ldots\ldots, U_n$

نجد أن:

$$U_p = U_1 + (p-1)\, r$$

ولتكن حسب الإتجاه:

$U_n, \ldots\ldots U_q, \ldots\ldots U_p, \ldots\ldots U_2, \quad U_1$

نجد أن:

$$U_q = U_n + (q-1)(-r)$$

بما أن: p=q

فإن: $U_q = U_n + (p-1)(-r)$

ويجمع الحدود المتقابلة في المعادلتين السابقتين:

$U_p = U_1 + (p-1)\,r$
$U_q = U_n + (p-1)(-r)$

$U_p + U_q = U_1 + U_n + (p-1)\,r - (p-1)r$

$\longrightarrow$ $\boxed{U_p + U_q = U_1 + U_n}$

في متتالية حسابية يكون مجموع الحدين المتساوي البعد عن الطرفين مساويا لمجموع الحدين المتطرفين.

مثال: 4 ، 7 ، 10 ، 13 ، 16 ، 19 .

$$(19 + 4) = (13 + 10) = (16 + 7) \Leftarrow \begin{cases} 23 = 16 + 7 \\ 23 = 13 + 10 \\ 23 = 19 + 4 \end{cases}$$

3.3- مجموع حدود متتالية حسابية:

لتكن المتتالية الحسابية (ذات "n" حد) التالية:

$$U_1, U_2, \ldots U_p \ldots\ldots, U_{n-1}, U_n$$

لنرمز لمجموع حدود هذه المتتالية بالرمز " S "

$$S = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_p + U_{n-1} - U_n \qquad (1)$$

ولنكتب هذا المجموع بكيفية أخرى:

$$S = U_n + U_{n-1} + \ldots + U_p + \ldots + U_2 + U_1 \qquad (2)$$

ولنجمع كل حدين متقابلين من المعادلتين (1) و (2):

$S = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots\ldots + U_{n-2} + U_{n-1} + U_n$
$+$
$S = U_n + U_{n-1} + U_{n-2} + \ldots\ldots + U_3 + U_2 + U_1$

$2S = (U_1+U_n)+(U_2+U_{n-1})+(U_3+U_{n-2})+\ldots+(U_{n-1}+U_2)+(U_n+U_1)$

نلاحظ أن كل الحدود المتواجدة داخل الأقواس هي حدود متساوية البعد عن الطرفين n و بالتالي (حسب الخاصية السابقة) فإن كل مجموع داخل الأقواس يساوي مجموع الطرفين $(U_1 + U_n)$ و بما أنه يوجد "n" قوسا إذن :

$2S = n\,(U_1 + U_n) \rightarrow$ $\boxed{S = \frac{n(U_1 + U_n)}{2}}$

مثال رقم 01:

تتكون متتالية حسابية من10 حدود، حدها الأول 11، وحدها الأخير 39. أحسب مجموع كل حدود هذه المتتالية.

$S = \frac{n(U_1+U_n)}{2}$ n=10 : U_1 = 11: U_n = 39

$S = \frac{10(11+39)}{2} = \frac{500}{2} = 250$

مثال رقم 02:

لتكن متتالية حسابية، عدد حدودها 20، حدها الأول 100، وحدها الأخير 62، أحسب مجموع حدود هذه المتتالية.

$U_1 = 100; U_n = 62; n = 20 S = \frac{20(100+62)}{2} = 1620$

II - المتتالية الهندسية:

1- تعريف:

نسمي "متتالية هندسية" مجموعة الأعداد المتتالية والمرتبة بحيث يمكن الحصول على أي عدد منها بضرب العدد الذي قبله بعدد ثابت (r) نسميه " أساس ".

لتكن المتتالية الهندسية التالية: $U_1, U_2, ... U_{n-1}$

يمكن الحصول على هذه الحدود كما يلي:

$U_2 = U_1 \times r$
$U_3 = U_2 \times r$
$U_4 = U_3 \times r$
---- -------
$U_n = U_{n-1} \times r$

مثال:

10، 20، 40، 80 هي متتالية هندسية، عدد حدودها 4 وأساسها r=2.

240 ، 480 ، 960 هي متتالية هندسية، عدد حدودها 3 و أساسها r=2.

32، 16، 8، 4، 2 هي متتالية هندسية، عدد حدودها 5 وأساسها r=1/2.

2- قيمة الحد النوني «n»:

لتكن المتتالية الهندسية التالية ذات "n" حد:

$U_1, U_2, U_3 \ldots\ldots U_{n-1}, U_n$

$U_2 = U_1 \times r$
$U_3 = U_2 \times r = U_1 \times r \times r = U_1 \times r^2$
$U_4 = U_3 \times r = U_1 \times r^2 \times r = U_1 + r^3$
....
$U_n = U_{n-1} \times r = U_1 \times r^{n-1}$

وبصورة عامة:

$$\boxed{U_n = U_1 \times r^{n-1}}$$

مثال:

ما هو الحد التاسع في متتالية هندسية، أساسها r=2، وحدها الأول يساوي 5؟

$r = 2 \quad U_1 = 5 \quad U_9 = ?$

$U_n = U_1 \times r^{n-1} \Rightarrow U_9 = U_1 \times r^8 = 5 \times 2^8 = 5 \times 256 = 1280$

3- دراسة متتالية هندسية ذات "n" حد:

لتكن المتتالية الهندسية التي عدد حدودها "n" وأساسها "r" وحدها الأول "U_1".

الحدان U_1 و U_n: هما الحدان المتطرفان.

كل الحدود الأخرى (من U_2 إلى U_{n-1}) هي متوسطات هندسية.

1.3- حساب الأساس بمعرفة الحدين المتطرفين:

$$U_n = U_1 \times r^{n-1} \longrightarrow r^{n-1} = \frac{U_n}{U_1} \longrightarrow \boxed{r = \sqrt[n-1]{\frac{U_n}{U_1}}}$$

الحالة الأولى: هو عدد فردي (إذن nزوجي)⇐ يوجد حل وحيد.

مثال:

أحسب أساس متتالية هندسية متكونة من 4 حدود، و التي حدها الأول (-2) و حدها الأخير 16.

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{U_n}{U_1}} = \sqrt[3]{\frac{16}{-2}} = \sqrt[3]{-8} \quad -2$$

$r = -2$

حدود هذه المتتالية هي: -2 ، 4 ، -8 ، 16 .

الحالة الثانية: هو عدد زوجي (إذن n فردي) ⇐ هناك حلان

إذا كان $\frac{U_n}{U_1} > 0$

مثال:

لتكن متتالية هندسية، عدد حدودها 5، و حدها الأول $U_1 = -2$، وحدها الأخير $U_n = -32$ ، أحسب أساس هذه المتتالية .

$$r = \sqrt[4]{\frac{-32}{-2}} = \sqrt[4]{16}$$

⟶ هناك حلان $r_1 = 2$ ، $r_2 = -2$

و في هذه الحالة توجد متتاليتان تحققان هذه الشروط :

-2 ، -4 ، -8 ، -16 ، -32
-2 ، +4 ، -8 ، +16 ، -32

الحالة الثالثة: إذا كانت كل الحدود موجبة، إذا العبارة $\frac{U_n}{U_1}$ موجبة.
عندئذ يكون للأساس "r" حل وحيد (سواء كانت n زوجية أو فردية)

2.3- خواص الحدود المتساوية البعد عن الطرفين:

لتكن المتتالية الهندسية: ذات الأساس "r" بحيث يكون للحدين U_k ، U_p نفس البعد عن الطرفين :

$$U_k = U_1 \times r^{k-1}$$

$$U_p = U_1 \times r^{p-1}$$

يمكن التعبير عن U_p بواسطة U_n كالتالي $U_p = U_n \times \left(\frac{1}{r}\right)^{p-1}$

وبما أن للحدين U_k، U_p، نفس البعد عن الطرفين:

$$\left.\begin{array}{l} U_p \text{ له } p \text{ حد بعده} \\ U_k \text{ له } k \text{ حد قبله} \end{array}\right\} \Longleftarrow \quad k = p \quad \Leftarrow$$

و يضرب الحدود المتقابلة في هذين العبارتين

$$\begin{cases} U_k = U_1 \times r^{k-1} \\ U_p = U_n \times \left(\frac{1}{r}\right)^{N-1} \end{cases}$$

$$U_k \times U_P = \left[U_1 \times r^{k-1}\right] \times \left[U_n \times \left(\frac{1}{r}\right)^{p-1}\right] \qquad \left(\frac{1}{r}\right)^{p-1}$$

بما أن: $k = p \Rightarrow U_K \times U_P = \left[U_1 \times r^{k-1}\right] \times \left[U_n \times \left(\frac{1}{r}\right)^{k-1}\right]$

وفي النهاية يكون:

$$\mathbf{U_k \times U_p = U_1 \times U_n}$$

في متتالية هندسية حاصل جداء الحدين المتساوي البعد عن الطرفين مساويا لحاصل جداء الطرفين.

3.3-مجموع حدود متتالية هندسية:

لتكن المتتالية الهندسية: $U_1, U_2, U_3 .... U_{n-1}, U_n$ و

$$S= U_1+U_2 +U_3 +.....U_{n-2} +U_{n-1}+U_n$$

ليكن

$$(I) = U_1 + U_1 \times r + U_1 \times r^2 + U_1 \times r^3 +.....+ U_1 \times r^{n-2} + U_1 \times r^{n-1}$$

و لنضرب طرفي العبارة (**I**) بالأساس r :

$$r \times S = U_1 r + U_1 r^2 + U_1 r^3 +.....+ U_1 r^{n-1} + U_1 r^n \textbf{ ...(II)}$$

و لنطرح العبارة (**I**) من العبارة (**II**) كما يلي :

$$Sr = U_1 r + U_1 r^2 + U_1 r^3 +.....+ U_1 r^{n-1} + U_1 r^n \quad \textbf{(II)}$$

$$S = U_1 + U_1 r + U_1 r^2+.....+ U_1 r^{n-2} + U_1 r^{n-1} \textbf{ (I)}$$

$$S r - S = U_1 r^n - U_1$$

$$S (r-1) = U_1 r^n - U_1 \longrightarrow \boxed{\mathbf{S = U_1 \frac{r^n-1}{r-1}}}$$

مثال رقم 01:

أحسب مجموع الحدود لمتتالية هندسية تتكون من 08 حدود، وأساسها r=2، وحدها الأول U=10.

$$n=8 \text{ ، } r=2 \text{ ،} U_1=10$$

$$S = U_1 \frac{r^n-1}{r-1} = 10 \times \frac{2^8-1}{2-1} = 10\ (256 -1) = 2550$$

مثال رقم 02:

ما هو مجموع الحدود الستة الأولى من متتالية هندسية. حدها الأول 30، و أساسها $\frac{1}{2}$ ؟

$$S= 30 \frac{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^6-1\right]}{\frac{1}{2}-1} = 30 \frac{\frac{1}{64}-\frac{64}{64}}{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}} = 30 \frac{63}{32} = 59{,}0625$$