الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التكوين والتعليم المهنيين
Ministère de la Formation et de l'Enseignement Professionnels

Centre National de l'Enseignement Professionnel à Distance (CNEPD)

المركز الوطني للتعليم المهني عن بعد (م.و.ت.م.ب)

درس في الإحصاء

السلسلة رقم 06
التبديلات – الترتيبات – التوفيقات

خطة الدرس:

I- عموميات

1- الجداء الديكارتي لمجموعتين
2- اتحاد مجموعتين

II- الترتيبات (بدون تكرار)

1- مثال
2- تعريف
3- عدد الترتيبات مكونة من « p » عنصر مختارة من بين « n » عنصر
4- ملاحظة
5- العبارات الأخرى لـ A_n^p
6- تطبيق

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

III- التبديلات

1- مثال
2- تعريف
3- عدد التبديلات من « n » عنصر
4- ملاحظة

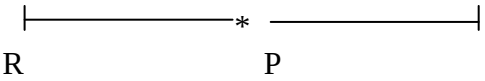
IV- التوفيقات

1- مثال
2- تعريف
3- عدد التوفيقات لـ « n » عنصر من « p »
4- خصائص C_n^p

I- عموميات:

1- الجداء الديكارتي لمجموعتين:

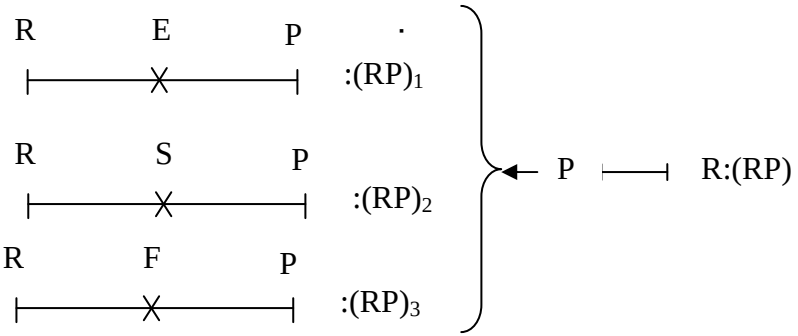
لنأخذ مثالا لوكالة سياحية تنظم رحلات على متن حافلات من المكان « R » إلى المكان « B » مرورا من المكان « p » ، حسب الشكل التالي:



بين « R » و « P » لدينا مسارات مختلفة:

- $(RP)_1$ مارا من المكان « E »
- $(RP)_2$ مارا من المكان « S »
- $(RP)_3$ مارا من المكان « F »

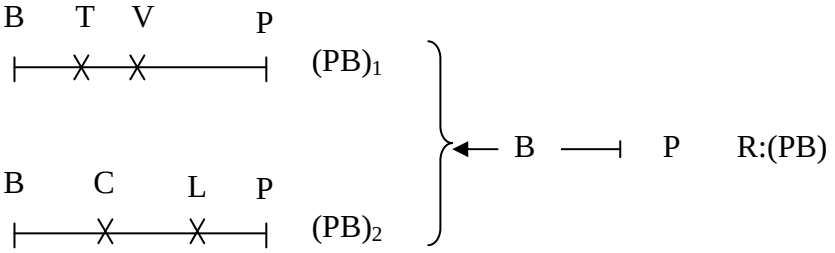
وهذا حسب الشكل التالي :



بين « P » و « B » نجد خطين مختلفين:

- خط $(PB)_1$ مارا من المكان « T» و « V»
- خط $(PB)_2$ مارا من المكان « C» و « L»

لدينا الشكل التالي :



الأسئلة:

كم خط (R-B) تمنح لزبائنها ؟

لنفرض الطرق الممكنة التالية:

$(PB)_1$ ثم $(RP)_1$
$(PB)_2$ ثم $(RP)_1$
$(PB)_1$ ثم $(RP)_2$
$(PP)_2$ ثم $(RP)_2$
$(PB)_1$ ثم $(RP)_3$
$(PB)_2$ ثم $(RP)_3$

مجموعة البداية من الشكل (R-P) هي :

$$\{(RP)_3 ،(RP)_2 ،(RP)_1\}$$

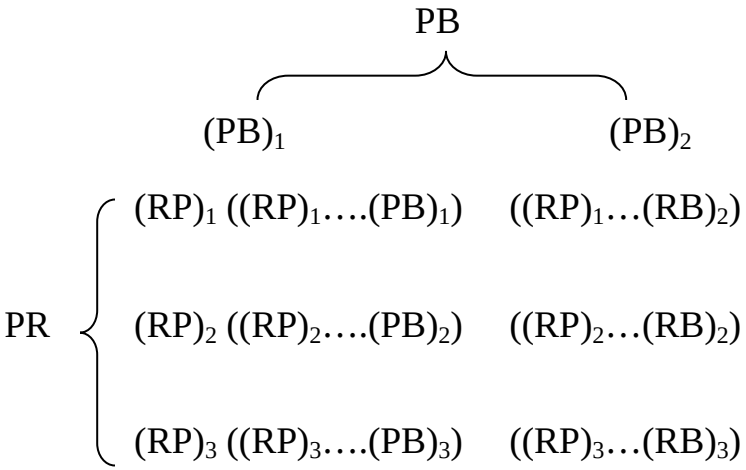
ومجموعة الوصول من الشكل (PB) هي:

$$\{ \quad (PB_2) ، (PB_1) : \}$$

نسمي "الجداء الديكارتي" للمجموعة (RP) في المجموعة (PB) مجموعة الثنائيات الممثلة من العنصر (RP) والعنصر (PB) حسب هذا الترتيب.

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

الثنائيات المنتمية للمجموعة (RP) × (PB) هي:



إذا كانت التجربة (RP) لديها ثلاث مخارج n(3) ممكنة ومختلفة عن بعضها مثنى مثنى وإذا كانت للتجربة (PB) مسارين مختلفين أي P(2) فإن التجربة التي تستلزم بالقيام أولا بالتجربة (PB) لها n×P مسلك ممكن مختلف عن الآخر مثنى مثنى.

ليكن E و F مجموعتين منتهيتين.

لنعتبر $n(E)$ و $n(F)$ أصلي المجموعتين أي هو عدد عناصر كل مجموعة. أصلي المجموعة $E \times F$ مرتبط بأصلي E وF ، أي:

$$n(E \times F) = n(E) \times n(F)$$

2- اتحاد مجموعتين:

لنأخذ المثال السابق للوكالة السياحية مع المسارات التالية:

من المكان « R » إلى المكان « B » 6 اتجاهات:

$$\left\{(R\text{-}B)_1 , (R\text{-}B)_2, (R\text{-}B)_3, (R\text{-}B)_4, (R\text{-}B)_5, (R\text{-}B)_6\right\}$$

من المكان :« R » إلى المكان « C » 3 اتجاهات:

$$\left\{ (R\text{-}C)_1 , (R\text{-}C)_2 , (R\text{-}C)_3\right\}$$

كم اتجاه مختلف تمنحه الوكالة؟

عدد الاتجاهات الممنوحة:

$[(R\text{-}B)_1 + (R\text{-}B)_2 + (R\text{-}B)_3 + (R\text{-}B)_4 + (R\text{-}B)_5 + (R\text{-}B)_6 + (R\text{-}C)_1 + (R\text{-}C)_2 (R\text{-}C)_3]$.

أي: $6 + 3 = 9$

وبشكل رياضي نكتب:

$R\text{-}B = \{(RB)_1 , (RB)_2, (RB)_3, (RB)_4, (RB)_5, (RB)_6\}$

$R - C = \left\{(RC)_1, (RC)_2, (RC)_3\right\}$

$RB \cap RC = \varnothing$

نقرأ (RB) تقاطع (RC) تساوي المجموعة الخالية ∅ (التي لا تحتوي على أي عنصر).

أي:

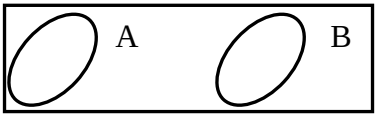
إذا كانت تجربة (RB) لديها ستة مخارج ممكنة $n(6)$ ومختلفة مثنى مثنى وإذا كانت تجربة (RC) لديها 03 مخارج $P(3)$، فإن التجربتين لا تقبل أي مخرج مشترك (تجربتين متنافرتين). التجربة $(RB) \cup (RC)$ التي تستلزم القيام بتجربة (RB) أو الأخرى (RC) تحتوي على $(n+P)$ مسلك ممكن يختلف عن بعضه البعض مثنى مثنى.

لتكن المجموعة المنتهية Ω ومجموعتين منفصلتين عن Ω، A و B.

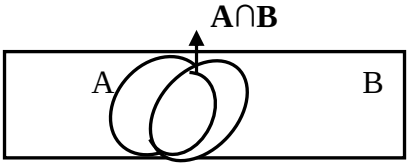
لدينا العلاقة التالية:

$$\varnothing = (A \quad \boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B)}$$

إذا كان: $A \cap B = \varnothing$ فإن العبارة $A \cup B$ تستبدل بالعبارة $A + B$



$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$



$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

عمـوما:

$$\boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

II- ترتيبات بدون تكرار:

1- مثال:

لجنة الإدارة لمؤسسة التأمينات مكونة من 5 أشخاص، « ABCDE » يجب على هذه اللجنة تعيين أعضاء "المكتب" من 3 أشخاص لديهم الصفات التالية:

-رئيس (P)
-كاتب (S)
-أمين الخزينة (T)

سؤال:

كم عدد المكاتب الممكن تشكيلها مع العلم أن كل عنصر من اللجنة بإمكانه ممارسة أي وظيفة من الوظائف المعلن عنها سابقا وأنه لا يستطيع القيام بالوظائف الثلاثة في آن واحد؟

الحل:

يمكن تشكيل مكتبين مختلفين:

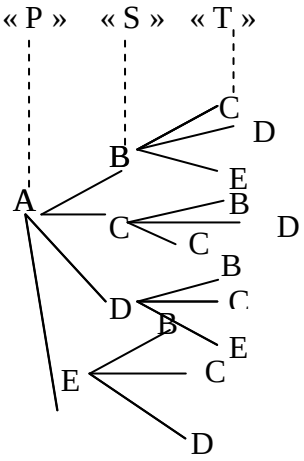
-حسب هوية الأعضاء الذين يشكلونه (مثل: ABE و ACD)؛
-حسب المناصب المسندة إلى الأعضاء (مثل: ABE و BEA).

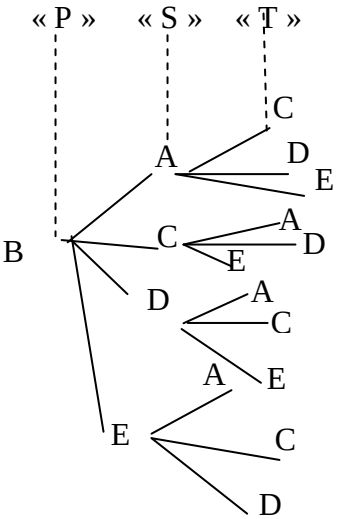
إذا فرضنا أن الأول المعين هو الرئيس، و الثاني كاتب والثالث أمين خزينة:

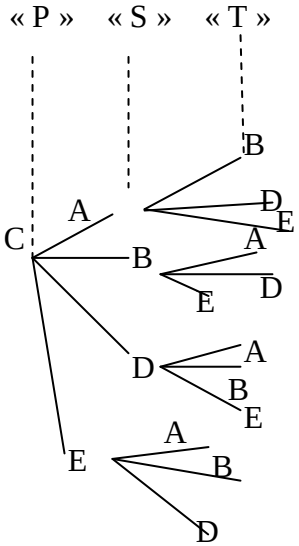
-ليشغل منصب رئيس، نستطيع تعيين 5 أشخاص.
-ليشغل منصب الكاتب 4 أشخاص ممكن تعيينهم.
-أخيرا ليشغل منصب أمين الخزينة 3 أشخاص يمكن تعيينهم.

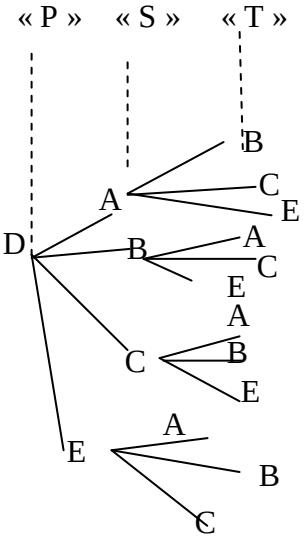
عدد المكاتب الممكن تشكيلها $5 \times 4 \times 3 = 60$

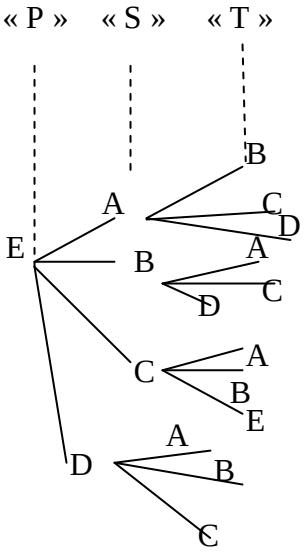
الجدول التالي يبين "60" مكتب حيث أن كل مكتب يشكل ترتيبة بدون تكرار (لا يوجد تجميع المناصب).


« P »
« S »
« T »
A
B
C
D
E


« P »
« S »
« T »
A
B
C
D
E


« P »
« S »
« T »
A
B
C
D
E


« P »
« S »
« T »
A
B
C
D
E



2- تعريف:

نسمي ترتيبة P عنصر من E كل قائمة ذات n عنصر من مجموعة جزئية بحيث تكون هذه العناصر متمايزة مثنى مثنى ($P < n$).

3- عدد الترتيبات مكونة من P عنصر مختارة من بين n عنصر:

ليكن لدينا E مجموعة مكونة من n عنصر .

$$E = \{n_1, n_2, \ldots\ldots, n_n\}$$

الإشكالية:

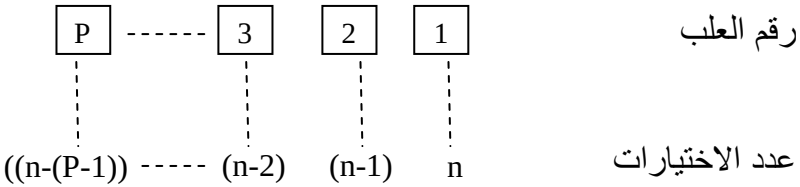
كم مجموعة جزئية E' (مشكلة من P عنصر) مختارة من بين n عنصر $(0 < P < n)$ يمكن تشكيلها مع اعتبار رتبة هذه العناصر.

لدينا طاولة مكونة من P علبة مماثلة ومرقمة من 1 إلى P.

- في العلبة رقم 1 يمكننا وضع أي عنصر من n عنصر.
- في العلبة رقم 2 يمكننا وضع أي عنصر من (n-1) من العناصر.
- في العلبة رقم 3 يمكننا وضع أي عنصر من (n-2) عنصر.

.....

- في العلبة رقم n يمكننا وضع أي عنصر من (n-(P-1)) عنصر.



حسب القاعدة السابقة، عدد الترتيبات يساوي جداء عدد العناصر المختارة.

وبالتالي يكون عدد ترتيبات P عنصر من مجموعة ذات n عنصر.

نرمز له A_n^P يقرأ « A,n,P »

ومنه نكتب: $A_n^p = n(n-1)(n-2).(n-(p-1))$.

4- ملاحظة:

لنأخذ المثال السابق حول لجنة الإدارة لمؤسسة:

« P » منصب رئيس.
« S » منصب كاتب.
« T »منصب أمين خزينة.

مجموعة "المكاتب" تكتب:

$$B = \{"P", "S", "T"\}$$

ومجموعة اللجان تكتب :

$$C' = \{A, B, C, D, E, F\}$$

لنعين ترتيبة بإرفاق كل عنصر من B عنصر من C' بشرط أن يكون لكل عنصرين مختلفين من B صور مختلفة من C' وبذلك نضع بعين الاعتبار تطبيق f من المجموعة B في المجموعة C' ذات الخاصية التالية:

- عنصرين مختلفين من B لهما صورتان مختلفتان في C'.
- وظيفتين مختلفتين مقدمتين من طرف شخصين مختلفين:

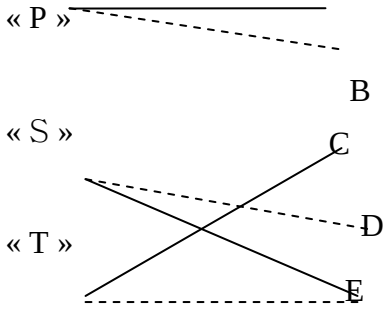
نقول أن f تطبيق (تباييني).

f : E $\rightarrow$ F تباين <= >, $\forall x_1 \in E_1, \forall x_2 \in E_2$

$x_1 \neq x_2 => f(x_1) \neq f(x_2)$ أو $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

ومنه عدد الترتيبة A_n^p هو تباين من المجموعة ذات P عنصر في المجموعة ذات n عنصر.

لنشكل في الرسم التالي، ترتيبتين مختلفتين من بين 60 حالة:



5- العبارات الأخرى لـ A_n^P :

لقد بينا :F $A_n^p = n(n-1)\,(n-2)\,..(n-(p-1)$

لنضرب و نقسم الطرف الثاني لهذه المساواة على الجداء:

$$n(n-p)\,(n-(p+1)\times(n-(p+2).....\times3\times2\times1$$

ونستطيع كتابة:

$$A_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(p-1)(n-p)(n-(p+1)\times...\times3\times2\times1}{(n-p)(n-(p+1)(n-(p+2)\times.....\times3\times2\times1}$$

البسط مشكل من جداء n عدد صحيح وهذا الجداء يكتب ! n (يقرأ n عاملي).

نفس الشيء بالنسبة للمقام وهو مشكل من (n-P) عدد صحيح ويكتب على الشكل ! (n-P) ، (يقرأ (n-P) عاملي)

نستطيع إذن كتابة:

$$A_n^P = \frac{n!}{(n-p)!}$$

ملاحظة: إذا كان n =P فإن:

$$n = p \Rightarrow A_n^n \frac{n!}{(n-n)!} = n$$

حيث (n-n)!=0!=1

6- تطبيق:

عضو من شركة تأمين السيارات عليه توقيع ضمان على 3 أخطار من بين 10 المحتملة، الأخطار الثلاثة إجبارية ومتسلسلة.

جواب: لنطبق العلاقة السابقة:

A^3_{10}= 10(10-(2-1) (10-(3-1) = 10 × 9 × 8 = 720

$$A^3_{10} = \frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1} = 10\times9\times8 = 720$$

III – التبديلات :

1- مثال:

لجنة الإدارة لشركة التأمين مشكلة من 4 أشخاص (A,B,C,D) ، على هذه الأشخاص توزيع الوظيفات التالية:

« P » رئيس، « S » كاتب، « SA » كاتب مساعد، « T » أمين خزينة.

سؤال:

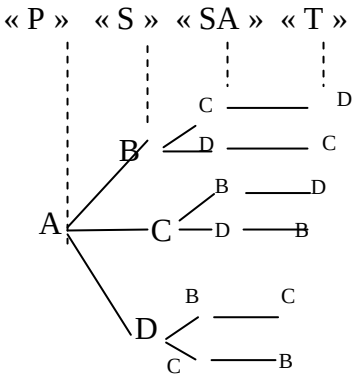
كم لجنة ذات منصب مختلف يمكن تشكيلها بغرض أن يكون باستطاعة كل منهم شغل أي منصب معلن عنه وأنه لا يمكن تجميع المناصب؟

جواب:

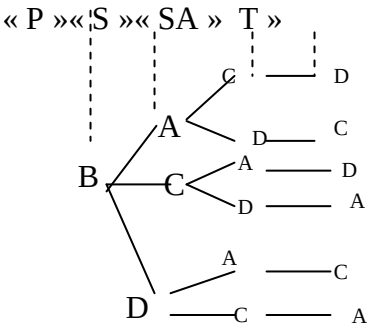
لا يوجد فرق بين لجنتين (02) ذات وظيفتين مختلفتين " إلا فيما يخص المناصب المقترحة على المنصب المكتسب من كل عضو، وكل الأعضاء القابلين شغل المنصب يتمتعون بذلك:

$$24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4$$

نجد حسب هذا الشكل ما يلي:

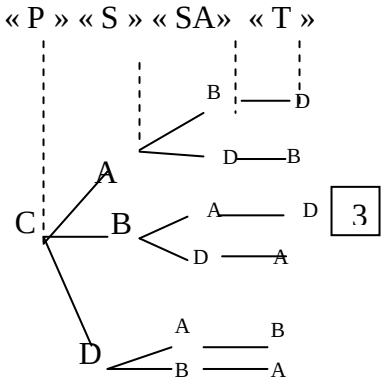


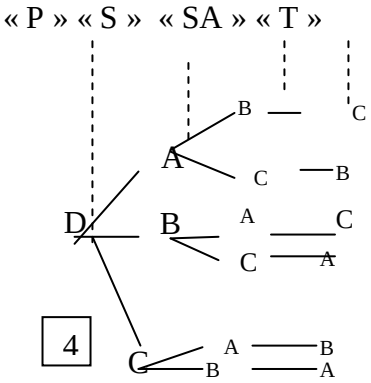
1



2

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر





في الشكل (1) يمكن لمختلف اللجان أن تكون كما يلي:

(A,B,C,D),(A,B,D,C) (A,C,B,D),(A,C,D,B), (A,D,B,C), (A,D,C,B) المناصب المشغولة حسب الترتيب لكل لجنة: P,S,SA,T نفس الملاحظة، للأشكال (2) ، (3) ،(4).

2- تعريف:

كل تبديلة لمجموعة E من n عنصر هي مجموعة مكونة من كل عناصر E

3- عدد تبديلات من n عنصر:

لدينا n علبة مماثلة ومرقمة من 1 إلى n.

عدد العلب 1، 2، 3،4 ، ..... ،n-1 ،n

عدد الاختيارات n ، n-1 ، n-2،.....1،2.

عدد التبديلات يساوي عدد الاختيارات ويكتب على الشكل: P_n

$$Pn = n (n-1) (n-2)\times\dots\times 3\times 2\times 1$$

ومنه: $\boxed{P_n = n!}$

ونلاحظ أن : $A^n_n = n ! = Pn$

مثال:

$P_4 = 4\times3\times2\times1 = 4\times3\ !$

$P_3 = 3\times2\ !$
$P_2 = 2\times1\ !$
$P_1 = 1\times0\ !$

4- ملاحظة:

في المثال السابق إذا رمزنا لمجموعة "لجنة" بـ $CO = \{A, B, C, D\}$ ومجموعة "لجنة تشغيل المناصب $COD = \{P, S, SA, T\}$، إذا أرفقنا كل عنصر من COD عنصر من CO بشرط أن يكون لكل عنصر من CO صورة لعنصر وحيد من COD فإننا نتحصل على تبديلة.

التطبيق F من المجموعة CO في المجموعة COD هو تطبيق تقابلي.

تذكير:

لدينا مجموعتين E و F' وf تطبيق من E→F

يكون f تطبيق تقابلي إذا وفقط إذا كان:

F **متباين:** كل عنصر من f يكون هو صورة لعنصر من E وصورة لعنصر من E .
ونقول أيضا: " كل عنصر من F وهو صورة على الأكثر لعنصر من E.

- F **غامر:**

نستطيع أن نقول أن كل عنصر من F هو صورة على الأقل لعنصر من E.

خلاصة:

f تقابل، إذا وفقط إذا كان كل عنصر من F' هو صورة فعلية لعنصر من E أو f تقابل إذا كان f تباين و f غامر.

تطبيق:

أراد 8 ضيوف الجلوس على طاولة ذات 8 أبعاد. كم حالة للجلوس ممكنة؟

$$P_8 = 8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1= 40320$$

VI – التوفيقات:

1- مثال:

تتكون لجنة الإدارة لمؤسسة من 5 أشخاص A,B,C,D,E . على هذه اللجنة تعيين أعضاء لوفد مكون من 3 أشخاص مكلفين بتمثيلهم.

المطلوب: كم وفد يمكن تشكيله؟

نلاحظ أنه لم نعد نهتم كما في حالة الترتيبات بعدد المناصب لكل الأشخاص المكونين للوفد، وإنما نهتم فقط بهويتهم. يكون وفدان مختلفان إذا كان بينهم شخص على الأقل يختلف.

نفترض أن وفد مكون من 3 أشخاص A,B,C يمكن ترتيب أعضائه بستة طرق مختلفةABC, BAC, CAB,BCA, CBA ، وذلك بإجراء كل التبديلات الممكنة بما أن :

$$P_3 = 3\times2\times1=6$$

وبإجراء نفس العملية على لجنة أخرى، ACE مثلا نتحصل على 6 حالات مختلفة، كل مجموعة من المجموعات مكونة من 3 أشخاص ومرتبة حسب ترتيبة لـ 5 أشخاص بدرجة 3.

عدد الوفود هو إذا أصغر من عدد الترتيبات بستة مرات أي:

$$\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = 10$$

إن تكوين 10 وفود يظهر في الجدول التالي: كل وفد يشكل توفيقة من 5 أشخاص بدرجة 3 دون تكرار.

ABC	ACD	BCD	CDE
ABD	ACE	BCE	
ABE	ADE	BDE	

2- تعريف:

E مجموعة ذات n عنصر، P عدد طبيعي، نسمي توفيقة P عنصر من المجموعة E ، كل جزء من E يشمل P عنصرا.

3- عدد التوفيقات n عنصر من P:

- **العبارة الأولى:**

ليكن E' أي $E' \subset E$ مجموعة جزئية لـ E .

لنبدل P عنصر من المجموعة الجزئية، نتحصل على P_p تبديلة من n عنصر ذات درجة P عنصر، لو كررنا هذه العملية لكل مجموعة جزئية مكونة من P عنصر وتشكل توفيقة n عنصر ذات درجة P، نتحصل على كل ترتيبات n عنصر ذات P درجة.

هذا العدد يكتب C_n^P أو يقرأ (c,n,p)

$$C_n^P = \frac{A_n^p}{P_P}$$

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p_p}\left[C_n^p \frac{n(n-1)....(n-p+1)}{P!}\right] = \frac{n(n-1)..(n-p+1)}{P(p-1)...\times 2\times 1}$$

- **العبارة الثانية:**

لنضرب بسط ومقام النسبة السابقة بالمقدار التالي:

$(n-p)! = (n-p)(n-p-1)\ldots\times 3\times 2\times 1$

$$C_n^p = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)(n-p)(n-p-1)\ldots\times 3\times 2\times 1}{[p(p-1)\ldots 2\times 1\ ][(n-p)n-p-1)\ldots\times 3\times 2\times 1\ ]}$$

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

3- ملاحظة:

إذا كان P=n لدينا: $C_n^n = 1$

إذا كان P=0 لدينا: $C_n^n = \frac{n!}{0!n!} = 1$

4- خصائص C_n^P :

1°) $C_n^p = C_n^{n-p}$

$$C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} = C_n^p$$

البرهان:

2°) $C_{n-1}^p = \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!}$

$$C_{n-1}^{p-1} = \frac{(n-1)!}{(p-1)![(n-1)-(p-1)]!} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}$$

ومنه:

$$C_{n-1}^{p} + C_{n-1}^{p-1} = \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}$$

$$= \frac{(n-1)!(p-1)!(n-p)!+(n-1)!\,p!(n-p-1)!}{p!(p-1)!(n-p)!}$$

لدينا: $$C_{n-1}^{p} + C_{n-1}^{p-1} = \frac{(n-1)!(p-1)!(n-p)+(n-1)!\,p!}{p!(n-p-1)!(p-1)!(n-p)!}$$

$$C_{n-1}^{p} + C_{n-1}^{p-1} = \frac{(n-1)!(n-p)+(n-1)!\,p}{p!(n-p)!} = \frac{(n-1)!(n-p+p)}{p!(n-p)!}$$

$$C_{n-1}^{p} + C_{n-1}^{p-1} = \frac{(n-1)!n}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

وأخيرا:

$$\boxed{C_{n-1}^{p} + C_{n-1}^{p-1} = C_{n}^{p}}$$