الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التكوين والتعليم المهنيين
Ministère de la Formation et de l'Enseignement Professionnels

Centre National de l'Enseignement
Professionnel à Distance
(CNEPD)

المركز الوطني للتعليم
المهني عن بعد
(م.و.ت.م.ب)

الإحصاء الوصفي

الهدف الرئيسي من دراسة هذه المادة

عند الإنتهاء من دراسة هذه المادة، يجب أن يكون المتربص قادرا على تطبيق قوانين الإحصاء في المجال المهني

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

مقدمة:

سنتناول دروس الحصاء الوصفي خلال دروس (05) من السنة ثانية:

الدرس الأول: المصطلحات و الجداول الإحصائية

الدرس الثاني: التمثيل البياني Représentation graphique

الدرس الثالث: مقاييس النزعة المركزية

الدرس الرابع: علاقة الارتباط Relation de corrélation

الدرس الخامس: علاقة الارتباط Relation de corrélation

حتى نتمكن من الوصول إلى دراسة جيدة لأي ظاهرة حتى نتمكن من أخذ صورة واضحة عنها و التعرف على مجموعة من الأمور أو أجزاء مجموعة من العناصر...الخ، و لكي نتمكن من وصف و تحليل البيانات الخاصة بالظاهرة و كذلك من عرضها بشكل.

كما يمكن تقسيم علم الإحصاء الوصفي إلى قسمين، هما علم الإحصاء الرياضي، والإحصاء التطبيقي، و يقصد بعلم الإحصاء الوصفي علم يختص بدراسة مجموعة واحدة، و تحليلها إلى العناصر أو المجموعات الجزئية.

الدرس رقم 01: المصطلحات و الجداول الإحصائية

الهدف من الدرس رقم 01: في نهاية هذا الدرس، يجب أن يكون المتربص قادرا على التعرف على مصطلحات الإحصاء الوصفي و تشكيل الجداول الإحصائية.

خطة الدرس رقم 01:

I - مدخل إلى الإحصاء الوصفي

1 - تعريف الإحصاء الوصفي و مجال تطبيقه

1.1 - تعريف الإحصاء
2.1 - أقسام علم الإحصاء
3.1 - مجال تطبيقه

2 - مصطلحات علم الإحصاء

1.2 - المجتمع الإحصائي و العينة الإحصائية
3.2 - المتغيرات الإحصائية
4.2 - التكرارات الإحصائية

II - الجداول الإحصائية

1 - تبويب البيانات الخام في جدول تكراري بسيط
2 - تبويب البيانات في جدول تكراري ذو فئات
3 - تبويب البيانات في الجدول التكراري المتجمع (التجميعي)

III - تمارين تطبيقية

قلم الجزائر | WWW.DZPEN.COM

I - مدخل إلى الإحصاء الوصفي:

1 - تعريف الإحصاء و مجال تطبيقه:

1.1 - تعريف الإحصاء:

أ - التعريف الأول:

يمكن تعريف الإحصاء على أنه الأسلوب العملي الذي يسجل بالطرق الفنية واقع الأمر لظاهرة معينة أيا كان نوعها (بيولوجية – صناعية – اقتصادية – اجتماعية – جغرافية ... الخ) مصورا هذا الواقع في قالب قياسي رقمي يتم تصنيفه في جداول منظمة وتمثيله بيانيا. وكذلك تحليل البيانات واستخلاص النتائج منها، و اتخاذ القرارات المناسبة. و مقارنة الظواهر بعضها ودراسة العلاقات بينها. واستخدامها في تفهم حقيقة الظواهر ومعرفة القوانين التي تسير تبعا لها. ويعتبر علم الإحصاء لكثير من الباحثين المنطق السليم المدعم بمزيج قوى من الأساليب الرياضية.

ب التعريف الثاني:

الإحصاء هو العلم الذي يهتم بوصف طرق متعددة لجمع البيانات والمشاهدات ومن ثم يتم تنظيمها وعرضها باستخدام الأساليب العلمية لتحليلها واستخلاص النتائج منها.

ج التعريف الثالث:

يشار للإحصاء إلى أنه مجموعة من الأساليب العلمية القياسية التي يمكن توظيفها لجمع المعطيات (البيانات والمعلومات) عن الظواهر وتبويبها وتلخيصها وتقييمها والخروج منها باستنتاجات حول مجموعة وحدات المجتمع من خلال اعتماد جزء صغير من هذا المجتمع . ولقد كان الهدف الرئيسي من علم الإحصاء قديما هو عد أو حصر الأشياء المراد توفير بيانات إحصائية عنها، وكانت الجهة التي تقوم بإعداد الإحصاءات على مستوى الدولة تعرف بمصلحة التعداد ولذلك كان التعريف القديم لعلم الإحصاء بأنه علم العد، أي العلم الذي يشتمل على أساليب جمع البيانات الكمية عن المتغيرات والعلم الموضوع الدراسة

WWW.DZPEN.COM قلم الجزائر

2.1 -أقسام علم الإحصاء:

و يقسم البعض علم الإحصاء من وجهة نظر تطبيقية إلى قسمين:

✓ **القسم الأول: الإحصاء الوصفي Descriptive statistics**

و يتكون الإحصاء الوصفي من مجموعة من الأساليب التي تعتني بجمع البيانات وتنظيمها وتلخيصها وعرضها بطريقة واضحة في صورة جداول وأشكال بيانية، وحساب المقاييس الإحصائية المختلفة لها مثل النزعة المركزيةالتوشتت، والالتواء والتفلطح، وقياس قوة الارتباط بين ظاهرة وأخرى.

✓ **القسم الثاني: الاستدلال الإحصائي Statistical inference**

و يتكون الإحصاء الاستدلالي من الأساليب الخاصة باستخلاص النتائج والمعلومات عن المجتمع تحت الدراسة من بيانات تم جمعها من عينة تم اختيارها من هذا المجتمع. وسوف نوضح المجتمع الإحصائي والعينة الإحصائية بأنواعها فيما بعد.

3.1 -مجال تطبيق الإحصاء:

يستخدم الإحصاء في مجالات متعددة منها : الزراعة، البيولوجيا، الديموغرافيا، الاقتصاد، علم الاجتماع، علم النفس.

2 -مصطلحات علم الإحصاء:

1.2 -المجتمع الإحصائي و العينة الإحصائية:

أ - المجتمع الإحصائي:

هو مجموعة من المفردات التي تشترك في صفات، وخصائص محددة، ومجتمع الدراسة هو الذي يشمل جميع مفردات الدراسة، أي هو الكل الذي نرغب دراسته.

قلم الجزائر | WWW.DZPEN.COM

ب المعينة الإحصائية:

هو جزء من المجتمع يتم اختياره بطرق مختلفة بغرض دراسة هذا المجتمع.

2.2 ـ المتغيرات الإحصائية Les variable statistiques:

تعريف:

و هي التي تمثل قيماً فعلية لظاهرة ما في لحظة معينة أو في لحظات و أزمنة مختلفة. و تنقسم إلى:

- المتغيرات المنفصلة أو المتقطعة؛
- المتغيرات المتصلة أو المستمرة.

مثال: البيانات التالية تبين تعداد الذكور و الإناث المقيمين في المدينة في مجتمع ما :

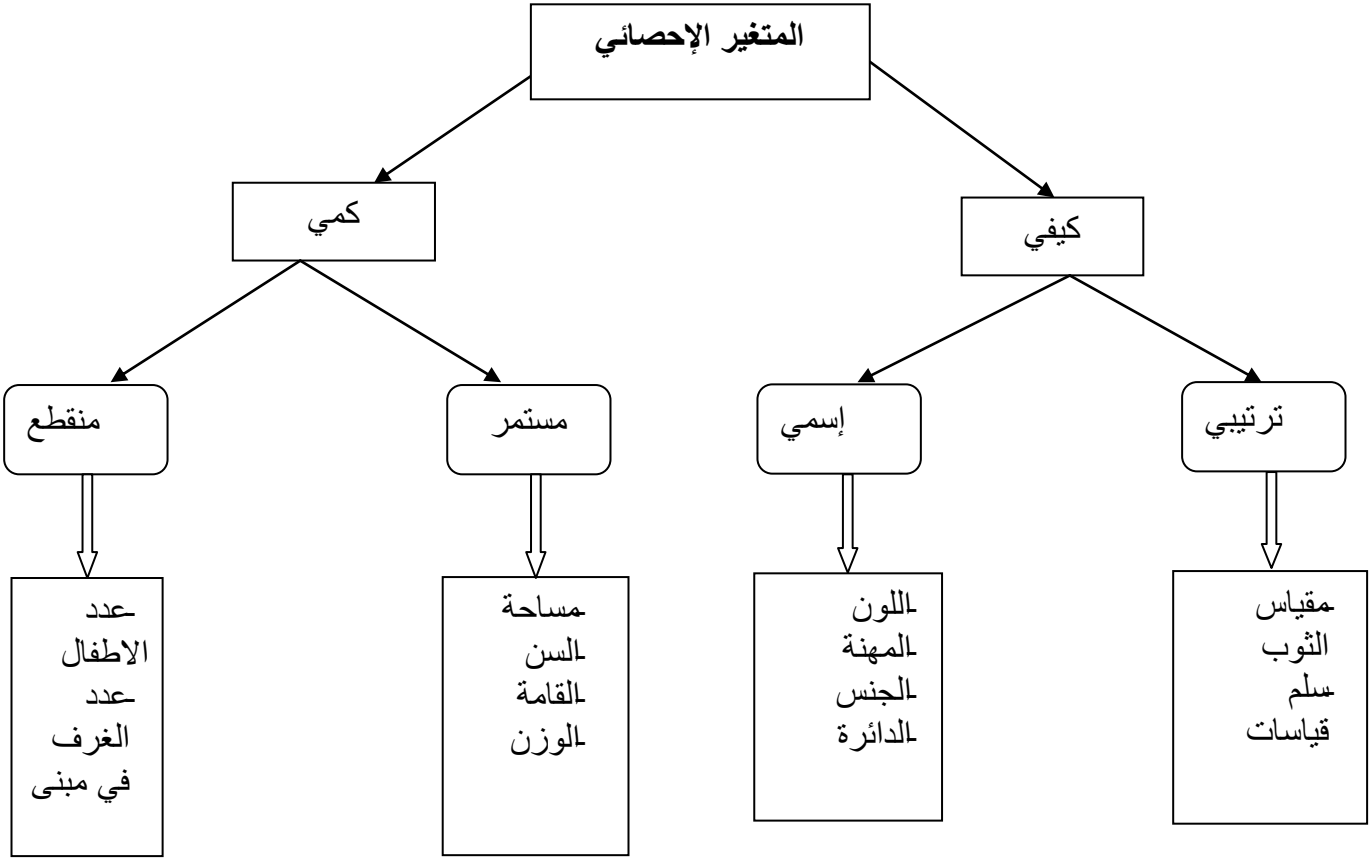
الذكور	الإناث
297	314

المجتمع الإحصائي هو مجتمع السكان المقمين في المدينة.

المتغير الإحصائي المدروس هو متغير الجنس و هذا المتغير يأخذ خاصيتين هما : جنس الذكور و جنس الإناث.

نرمز بـ x_1 لخاصية متغير جنس ذكر و بـ x_2 لخاصية متغير جنس أنثى.

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر



WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

أ - المتغير الكيفي variable quantitative:

المتغير الكيفي هو المتغير الذي لا يمكن قياسه عدديا و لا يمكن إجراء العمليات الحسابية عليه و مثال ذلك : الجنس، المهنة، اللون ..إلخ . و تقسم المتغيرات الكيفية إلى نوعين هما : متغيرات كيفية ترتيبية و متغيرات كيفية إسمية .

- **المتغيرات الإسمية variables nominales :**

هي عبارة عن متغيرات وصفية تصف عناصر المجتمع و لا يمكن إجراء العمليات الحسابية عليها و لا يمكن ترتيبها في أي شكل و هي تستخدم للدلالة على حالة المفردة من خلال التعبير اللفظي فقط، مثل النوع أو الجنسية ...إلخ.

- **المتغيرات الترتيبية variables ordinals :**

و هي عبارة عن متغيرات وصفية تصف عناصر المجتمع و لا يمكن إجراء العمليات الحسابية علياه و لكن يمكن وضع ترتيب منطقي لمفرداتها من خلال التعبير اللفظي ، مثل ممتاز - جيد جدا – جيد - رديء وغير ذلك.

ب المتغير الكمي variable quantitative :

المتغيرات الكمية هي المتغيرات التي يمكن قياسها مباشرة بالأرقام عددية مثل صفة الطول أو الوزن أو الكمية...إلخ. وتقسم المتغيرات الكمية إلى نوعيين :

- **المتغيرات المنقطعة (variable discrètes) :**

هي المتغيرات التي يمكن أن تأخذ قيما صحيحة فقط على خط الأعداد، مثل عدد الأفراد في الأسرة و عدد الوحدات الإنتاجية مصنع ... الخ

مثال: خاصية عدد الأطفال في الأسرة حسب العائلة يأخذ قيم:
1.2.3.4.5..... هو متغير كمي منقطع .

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

- **المتغير المتصل (variable continues) :**

و هي المتغيرات التي تأخذ مجال او مدى معين من القيم ، أو أنه ذلك المتغير الذي يمكن أن يأخذ كافة النقاط على خط الأعداد، مثل المتغير قيما لظاهرة ما حيث تتغير قيم مفردات المتغير من مفردة إلى أخرى، مثل متغير الطول أو الوزن أو العمر.

إذا كان عدد المفردات كبيرا جدا فمن الأسهل و الأفضل استخدام ما يسمى بالتوزيعات التكرارية و يتم ذلك بتجميع البيانات و توزيعها في مجموعات كبيرة أو صغيرة من القيم في فئات .

مثال: متغير درجات الحرارة هو متغير كمي مستمر حيث يأخذ قيم عددية غير منتهية مثال ذلك بين قيم درجات الحرارة 10 و 12 درجة المتغير يأخذ عدد غير منتهي من القيم العددية :° 10,007 -° 11,11 -11,9999° .

3.2 - التكرارات الإحصائية:

أ - التكرار العادي:

لتكن المتغيرات الإحصائية $x_1.x_2.x_3.....x_i$. نسمي التكرار العادي أو المطلق هذه المتغيرات عدد المرات التي تتكرر فيها القيم و نرمز للتكرارات ب n_i.

مثال: نفترض ان قيم علامات امتحان لقسم يتكون من 21 تلميذ هي كالتالي:

5 ;14 .13.16.9.8.18.2.13.12.15.12.8.6.5.17.3.19,9.13.14

لإيجاد التكرار المطلق نقوم أولا بترتيب قيم العلامات تصاعديا من أصغر علامة إلى أكبر علامة كالتالي :

2 ; 3 ; 5 ; 5 ; 6 ; 8 ; 8 ; 9 ; 9 ; 12 ; 12 ; 13 ; 13 ; 13 ; 14 ; 14 ; 15 ; 16 ; 17 ; 18 ; 19

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

نقوم بعدها برسم جدول لهذه السلسة نبين فيه التكرار المناسب لكل علامة أي عدد التلاميذ الذين تحصلوا على هذه العلامة كالتالي:

العلامات (المتغير الإحصائي) x_i	2	3	5	6	8	9	12	13	14	15	16	17	18	19
عدد التلاميذ (التكرارات) n_i	1	1	2	1	2	2	2	3	2	1	1	1	1	1

ب -التكرارات النسبية:

و يرمز له بالرمز f_i حيث يبين الأهمية النسبية لكل حالة و يحسب بقسمة كل تكرار على مجموع التكرارات $f_i = \frac{(ni)}{\sum ni}$

ج -التكرار المئوي أو التوتر الإحصائي:

و يرمز له بالرمز (%) أو (f_i%) ويحسب التكرار النسبي المئوي بضرب التكرار النسبي في 100 % و يجب ملاحظة أن مجموع التكرارات النسبية المئوية دائما يساوي 100 %.

مثال: التكرارات النسبية و المئوية للمثال السابق تحسب كالتالي:

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

المتغير الإحصائي xi	التكرارات n	التكرار النسبي f_i	%التكرار المئوي
2	1	0.0476	%4,76
3	1	0.0476	%4,76
5	2	0.0952	%9,52
6	1	0.0476	%4,76
8	2	0.0952	%9,52
9	2	0.0952	%9,52
12	2	0.0952	%9,52
13	3	0.142	%14,2
14	2	0.0952	%9,52
15	1	0.0476	%4,76
16	1	0.0476	%4,76
17	1	0.0476	%4,76
18	1	0.0476	%4,76
19	1	0.0476	%4,76
المجموع	**21**	**1 ,00**	**100 %**

II - الجداول الإحصائية :

1 -تبويب البيانات الخام في جدول تكراري بسيط :

يقصد بتبويب البيانات عرض هذه البيانات (البيانات الخام) في جداول مناسبة وذلك حتى يمكن تلخيصها وفهمها واستيعابها واستنتاج النتائج منها ومقارنتها بغيرها من البيانات ، كما يسهل الرجوع إليها في صورة جداول دون الاطلاع على الاستمارات الأصلية التي قد تحمل أسماء أصحابها مما يخل بمبدأ سرية البيانات الإحصائية .

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

تعريف الجدول التكراري البسيط:

الجدول التكراري البسيط هو ذلك الجدول الذي يتكون من عمودين حيث يتم وضع قيم المتغيرات الإحصائية فيه مرتبة ترتيباً تصاعدياً في عموده الأول أما العمود الثاني فيسمى بعمود التكرار ويرصد فيه عدد مرات تكرار كل درجة أو حدث . فكل البيانات تكون ممثلة في الجدول بالثنائيات (المتغيرات x_i و التكرارات n_i).

مثال 01: البيانات التالية تمثل قيم العلامات التي حصل عليها عشرون طالباً فى مادة الإحصاء فى امتحان نهاية العام :

12	11	15	14	12	10	15	13	12	10
14	10	13	12	15	13	12	10	12	15

و المطلوب تبويب هذه البيانات في جدول توزيع تكراري بسيط
هذه البيانات الخام غير عملية لذلك نقوم أولا بترتيب البيانات دون تكرار تصاعديا كالتالي :

10,10,10,10,11,12,12,12,12,12,12,13,13,13,14,14,15,15,15,15

نقوم بوضع هذه البيانات في العمود الأول من الجدول وتسمى (x) ثم وضع عدد مرات التكرار باستخدام العلامات في العمود الثاني أما العمود الثالث فيمثل التكرار ويرمز له بالرمز (n) كالتالي:

المتغير	العلامات	التكرارات
10	////	4
11	/	1
12	/ ////	6
13	///	3
14	//	2
15	////	4
المجموع		20

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

مثال 02: البيانات التالية تمثل تقديرات 20 طالباً في مادة الإحصاء والمطلوب هو وضع هذه البيانات فى جدول بسيط:

جيد، مقبول، جيد، جيد، مقبول، جيد جيد جداً، مقبول جيد جيد جداً

ممتاز جيد ممتاز جيد جداً مقبول جيد ممتاز جيد جيد مقبول

الحل:

التقديرات	التكرارات
مقبول	5
جيد	9
جيد جداً	3
ممتاز	3
المجموع	**20**

2 -تبويب البيانات في جدول تكراري ذو فئات :

إذا كان المتغير المدروس من نوع المتغير الكمي المتصل من الضروري تقسيم البيانات إلى مجموعات متقاربة ومتشابهة في الصفات تسمى فئات. و قبل التعرض إلى إعداد هذا الجدول سنقوم أولاً بالتعرف على معنى الفئات وطرق كتابتها.

1.2 تعريف الفئة:

الفئة هي المجال الذي يشمل حدا أدني و حد أعلى و نرمز للحد الأدنى للفئة بالرمز a و للحد الأعلى بالرمز b و يكون الحد الأعلى بمجال مغلق و الحد الأدنى بمجال مفتوح] a b[إلا في بعض الاستثناءات يتم غلق الحد الأعلى للفئة الأخيرة. و الرقم الوسطي بين a و b يسمي بمركز الفئة و يرمز له بالرمز C_j .

إذا كانت الفئة $[a_i ; b_i[$ ذات الرتبة j نرمز بصفة عامة بـ :

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

b_i : الحد الأعلى للفئة ذات الرتبة j
a_i : الحد الأدنى للفئة ذات الرتبة j
C_j : مركز الفئة ذات الرتبة j

$k_j = (b_i - a_i)$ طول الفئة ذات الرتبة j
n_j : تكرار الفئة ذات الرتبة j

هناك طريقتين في كتابة الفئات هما:

الطريقة الأولى: يكون المجال دائما مغلق في حده الأعلى و مفتوحا في الحد الأدنى و عند تحديد مثلا عدد الأرقام المحصورة في المجال بين 10 و 20 نبدأ بالقيمة 10 و نتوقف عند القيمة 20 حيث لا تدخل في هذه الفئة و يكون الجدول كالتالي :

x_i الفئات	n_i التكرارات
[10- 20 [	05
[20- 30 [	20
[30- 40 [	50
[40- 50 [	25

الطريقة الثانية : نذكر كلا من الحد الأدنى والحد الأعلى للفئة ولكن نقوم بترك فاصل مقداره الواحد الصحيح بين نهاية الفئة الأولى وبداية الفئة الثانية و يكون المجال دائما مغلق في حده الأدنى و مغلق أيضا في حده الأعلى فمثل لحصر القيم الموجودة في المجال المحصور بين 10 و 19 نبدأ بالعد من 10 إلى 19 و نتوقف وفي الفئة الثانية نبدأ من 20 إلى غاية 29 وهكذا كما بالجدول التالي :

x_i الفئات	n_i التكرارات
[10- 19	05
[20- 29	20
[30- 39	50
[40- 49	25

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

2.2 مركز الفئة:

مركز الفئة يمثل المتوسط الحسابي لكل من الحد الأعلى و الحد الأدنى لكل فئة [ai ; bi[و يرمز له بالرمز ; cj و يحسب كما يلي:

مركز الفئة : $ci = \frac{(ai + bi)}{2}$

مثال: الجدول التالي يمثل توزيع 75 فرد من المجتمع حسب السن , نحسب مراكز الفئات كالتالي :

الفئات **xi**	[0- 05 [	[05- 10 [	[10-15 [	[15- 20 [	[20 -25[	[25- 30[	[30-35[	[35-40[	**المجموع**
التكرارات n_i	4	7	10	15	18	12	06	03	**75**
مراكز الفئات c_i	$\frac{0+5}{2}$ **= 2.5**	$\frac{5+10}{2}$ **= 7.5**	$\frac{10+15}{2}$ **= 12.5**	$\frac{15+20}{2}$ **= 17.5**	$\frac{20+25}{2}$ **= 22.5**	$\frac{25+30}{2}$ **= 27.5**	$\frac{30+35}{2}$ **=32.5**	$\frac{35+40}{2}$ **= 37.5**	

3.2 -عدد الفئات:

عدد الفئات هو عدد المجالات التي يحتويها الجدول الإحصائي و يرمز له بالرمز J و حسب الباحث سترجس starges نحسب عدد الفئات بالعلاقة التالية :

$J = 1 + 3.32 \log(n)$. باللوغارتم العشري log

$J = 1 + 3.3 \ln(n)$. باللوغريتم النيبري ln

4.2 -طول الفئة:

نسمي طول الفئة $[a ; b[$ الأعداد الموجودة بين a و b و يرمز له بـ k و نحسب طول الفئة بالعلاقة التالية :

$$\text{طول الفئة} \quad k = \frac{(x\max - x\min)}{j} = \frac{(x\max - x\min)}{1+3.32\ln n}$$

حيث أن:

$X\,max$: هي القيمة الأعلى في البيانات؛

$X\,min$: هي القيمة الأدنى للبيانات؛

j : عدد الفئات .

مثال: أحسب طول الفئة للسلسلة السلسلة الإحصائية التالية:

60,78,95,30,46,68,65,40,50,45,70,72

طول الفئة بطريقة سترجس هو :

$$k = \frac{(x\max - x\min)}{1+3.32\ln n}$$

$$= \frac{(95 - 30)}{1+3.32\ln(12} \qquad k = \frac{65}{4.58}, k = 14.19$$

$k \approx 14$

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

تمرين : البيانات تمثل درجات اختبار مادة الإحصاء لخمسين(50) طالباً فى الجدول التالى :

57	42	51	55	70
53	63	47	60	45
55	82	39	65	33
42	65	61	58	64
55	45	53	52	50
39	63	59	36	25
64	54	49	45	65
78	52	41	42	75
26	48	25	35	30
88	46	55	40	20

المطلوب هو إعداد جدول توزيع تكراري ذو فئات للجدول السابق؟

الحل:

- المدى = $x\max - x\min$ (أكبر قيمة – أصغر قيمة) = 88 – 20 = 68
- عدد الفئات = $J = 1 + (3.3 \ln(n))$ = $J = 1 + (3.3 \ln(50))$= 1+3.3x1.699=6.6

نقرب عدد الفئات لأقرب رقم صحيح فتكون عدد الفئات = 7

- طول الفئة k = $\frac{(x\max - x\min)}{j}$

K= $\frac{(88 - 20)}{7} = \frac{(68)}{7} = 9{,}71$; نقرب طول الفئة لأقرب رقم صحيح فتصبح طول الفئة و هو 10 ، **k=10**

نختار بداية الفئة الأولى وهو أصغر رقم = 20

نبدأ في بناء الجدول كالتالي :

المتغير x_i	فرز العلامات	التكرارات N_i
[20- 30 [	////	4
[30- 40 [	// ////	6
[40- 50 [	// //// ////	12
[50- 60 [	// //// //// ////	14
[60- 70 [	/ //// ////	9
[70- 80 [	///	3
[80- 90 [	//	2
المجموع		50

3 -تبويب البيانات في الجدول التكراري المتجمع (التجميعي):

1.3 -تبويب البيانات في الجدول التكراري المتجمع الصاعد:

" tableau des effectifs cumulées croissants "

و يقصد بالتكرار المتجمع الصاعد هو تجميع تكرار كل فئة على جميع التكرارات السابقة لها بحيث يكون مجموع التكرار التصاعدي للفئة الأخيرة مساوي لمجموع التكرارات. ويرمز له بـ **nicc** .

مثال 01:

كون جدول التكرار المتجمع الصاعد للجدول التالي :

x_i	n_i
0	3
1	4
2	7
3	6
المجموع	**20**

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

الحل:

نكون جدول التوزيع التكراري المتجمع الصاعد بحساب التكرارات التجميعية الصاعدة كالتالي:

ليكن: التكرار التجميعي الصاعد l'effectif cumulé croissant de la (modalité i)

n1cc = n1 = 3, إذن: **n1cc = 3**
n2cc = n1cc + n2 = 3 + 4, إذن: **n2cc = 7**
n3cc = n2cc + n3 = 7 + 7, إذن: **n3cc = 14**
n4cc = n3cc + n4 = 14 + 6, إذن: **n4cc = 20**.

نتائج الحسابات تكون جدول التكرار التجميعي الصاعد التالي :

x_i	n_i	nicc
0	3	3
1	4	7
2	7	14
3	6	20
المجموع	**20**	

2.3 تبويب البيانات في الجدول التكراري المتجمع النازل :
Tableau des effectifs cumulés décroissants

و يقصد بالتكرار المتجمع النازل هو تجميع تكرار كل فئة على جميع التكرارات التالية لها بحيث يكون مجموع التكرار التنازلي للفئة الأولى مساوي لمجموع التكرارات . ويرمز له **nicd** .

مثال 02: من المثال السابق نكون جدول التكرار التجميعي النازل كالتالي نقوم بحساب التكرارات التجميعية النازلة لكل متغير كمايلي :

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

n1cd = n إذن: **n1cd = 20**

n2cd = n1cd – n1 = 20 – 3 إذن: **n2cd = 17**

n3cd = n2cd + n2 = 17 – 4 إذن: **n3cd = 13**

n4cd = n3cd + n3 = 13 – 7 إذن: **n4cd = 6**

نتائج الحسابات تجمع في جدول التكرار التجميعي النازلة بإضافة عمود خاص إلى الجدول التكراري الأصلي :

X_i المتغير	N_i التكرارات	nicd التكرارات التجميعية النازلة
0	3	20
1	4	17
2	7	13
3	6	6
المجموع	20	

III ـتمارين تطبيقية:

التمرين الأول:

قامت مصالح امن الطرقات بدراسة عدد ضحايا حوادث المرور بالسيارات السياحية للفئة العمرية التي تتراوح بين 18 و 65 سنة .الجدول التالي يظهر عدد الضحايا حسب فئات العمر المسجلة في سنة 2005 كما يلي:

فئات العمر	التكرارات
[18 ; 25[	790
[25 ; 35[	545
[35 ; 45[	377
[45 ; 65[	606

العمل المطلوب:

1 - ما هو المجتمع المدروس ؟
2 - ما هو المتغير المدروس؟ و ما هو نوعه ؟

التمرين الثاني :

في دراسة لتلاميذ أحد الأقسام النهائية حسب أطوالهم مقدرة بالسنتيمتر أعطت النتائج التالية:

159-163-166-170-173-175-178-160-163-166-170-174-176-178-161-165-168-170-174-176-183-161-165-168-171-174-176-186-162-166-169-173-174-176 -187

العمل المطلوب:

1 -رتب قيم الأطوال تصاعديا
2 -احسب عدد الفئات و طول الفئة
3 -قم بتفريغ البيانات في جدول إحصائي وبين تكرار كل فئة
4 -حدد مركز الفئة لكل فئة

WWW.DZPEN.COM قلم الجزائر

التمرين الثالث: الجدول التالي يبين توزيع الأسر حسب عدد الأطفال في كل أسرة:

عدد الأطفال	عدد الأسر
0	31 038
1	54 812
2	51 252
3	26 613
4 ou +	16 162

العمل المطلوب :

1 - حدد المجتمع المدروس.
2 - ما هو المتغير المدروس و ما هو نوعه ؟
3 - أحسب التكرارات المتجمعة التصاعدية و التنازلية.

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

حلول التمارين:

التمرين الأول:

1 - **المجتمع المدروس :** عدد حوادث المرور لسائقي السيارات السياحية التي يقودها السائقين الذين يتراوح سنهم بين 18 و 65 سنة

2 - **المتغير الإحصائي المدروس** : سن ضحايا الحوادث و **نوع المتغير الإحصائي المدروس** : كمي مستمر.

التمرين الثاني:

1 - ترتيب قيم الأطوال تصاعديا:

159 163 166 170 173 175 178
160 163 166 170 174 176 178
161 165 168 170 174 176 183
161 165 168 171 174 176 186
162 166 169 173 174 176 187

2 - حساب عدد الفئات و طول الفئة:

- **عدد الفئات :**

$j= 1+ 3.23 \ln(n)$, $J= 1+3.32 \ln(35)$, $J= 7n$

- **طول الفئة:**

$$\mathbf{K} = \frac{(x\ max\ - x\ min\ )}{j} = \frac{(x\ max\ - x\ min\ )}{1+3.32\ln n}$$

إذن :

$$k= \frac{(190-155)}{7} = \frac{35}{7} = 5,\ \mathbf{k=5}$$

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

3 - تفريغ البيانات و تشكيل الجدول الإحصائي:

الفئات	الفرز	التكرارات
[155- 160[	I	1
[160-165[	IIIIII	6
[165-170[	IIIIIIII	8
[170-175[	II IIIIIIII	10
[175- 180[	I I I I I I I	7
[180- 185[	I	1
[185- 190[	I I	2
المجموع		**35**

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

4 - حساب مراكز الفئات:

الفئات x_i	[155-160[	[160-165[	[165-170[	[170-175[	[175-180[	[180-185[	[185-190[	المجموع
مراكز الفئات c_i	157.5	162.5	167.5	172.5	177.5	182.5	187.5	
التكرارات n_i	1	6	8	10	7	1	2	**35**

التمرين الثالث :

1 - المجتمع الإحصائي المدروس هو: **مكونات الأسر**

2 - المتغير الإحصائي المدروس هو: **عدد الأطفال في الأسرة**، نوعه : **كمي منقطع**

3 - حساب التكرارات التجميعية الصاعدة و النازلة

حساب التكرارات التجميعية الصاعد **nicc :**

n1cc = 31 038 ;إذن**n1cc** = n1 = 31 038,
n2cc = 85 850إذن**n2cc** = n1cc + n2 = 31 038 + 54 812,
n3cc = 137 102 إذن**n3cc** = n2cc + n3 = 85 850 + 51 252,
n4cc = 163 175 إذن**n4cc** = n3cc + n4 = 137 102 + 26 613,
n5cc =179 877إذن**n5cc** = n4cc + n5 = 163 175 + 16 162,

نتائج حساب التكرارات التجميعية الصاعدة نلخصها في الجدول التالي :

x_i	n_i	nicc
0	31 038	31038
1	54 812	85850
2	51 252	137102
3	26 613	163175
4	16 162	179877

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

حساب التكرارات التجميعية النازلة nicd:

n1cd = n , إذن **n1cd = 179 877**

n2cd = n1cd – n1 = 179 877 – 31 038, إذن **n2cd = 148 839**

n3cd = n2cd + n2 =148 839 – 54 812 , إذن **n3cd = 94 027**

n4cd = n3cd + n3 = 94 027 – 51 252 , إذن **n4cd = 42 775**

n5cd = n4cd + n4 = 42 775 – 26 613 , إذن **n5cd = 16 162**

نتائج حساب التكرارات التجميعية النازلة نلخصها في الجدول التالي:

x_i	n_i	nicd
0	31 038	**179 877**
1	54 812	**148 839**
2	51 252	**94 027**
3	26 613	**42 775**
4	16 162	**16 162**

نتائج حساب التكرارات التجميعية الصاعدة و النازلة نلخصها في الجدول الاحصائي التالي :

x_i	n_i	nicc	nicd
0	31 038	31038	179 877
1	54 812	85850	148 839
2	51 252	137102	94 027
3	26 613	163175	42 775
4	16 162	179877	16 162

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

الدرس رقم 02: التمثيل البياني Représentation graphique

الهدف من الدرس رقم 02: في نهاية هذا الدرس، يجب أن يكون المتربص قادرا على:

- ✓ تمثيل المتغير الإحصائي الكيفي بيانيا؛
- ✓ تمثيل المتغير الكمي المنقطع بيانيا؛
- ✓ تمثيل المتغير الكمي المستمر بيانيا .

خطة الدرس رقم 02:

مقدمة

I - العرض البياني للبيانات الغير مبوبة

1 -طريقة الأعمدة البيانية البسيطة Diagramme en bâtons
2 -طريقة الدائرة البيانية Diagramme circulaire

3 -طريقة الأعمدة البيانية الأعمدة المستطيلة (diagramme en colonnes)

II - العرض البياني للبيانات المبوبة (متغير كمي)

1 -حالة متغير كمي منقطع
2 -حالة متغير كمي مستمر

1.2 -المدرج التكراري
2.2 -المضلع التكراري
3.2 -المنحنى التكراري

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

مقدمة:

يعتبر العرض البياني للبيانات الإحصائية بمثابة تلخيص للبيانات الإحصائية فى شكل يسهل معه استيعاب خصائص موضوع الدراسة ، وتختلف طرق عرض البيانات المبوبة عن البيانات الغير مبوبة ، وسنتعرض لكل منها بالتفصيل فيما يلى :

I ـ العرض البياني للبيانات الغير مبوبة (المتغير كيفي):

و المقصود بالبيانات الغير مبوبة تلك البيانات المفردة أي لا يوجد بها فئات وهناك عدة طرق لعرض البيانات الغير مبوبة .

1 ـ طريقة الأعمدة البيانية البسيطة:

و فى هذه الطريقة يمثل محور السينات قيم المتغير أما محور العينات يمثل القيمة المقابلة لقيمة المتغير ويتم رسم عمود حول المتغير وارتفاعه يمثل قيمة المتغير.

مثال:

الجدول التالى يوضح توزيع الطلاب حسب التخصصات في إحدى الجامعات والمطلوب عرض هذه البيانات باستخدام طريقة الأعمدة البيانية البسيطة ؟

التخصص	عدد الطلبة
الاقتصاد	650
علم الاجتماع	500
التاريخ	400
الجغرافيا	350
الحقوق	550

2 -طريقة الدائرة البيانية Diagramme circulaire:

و فى هذه الطريقة يتم رسم دائرة ثم نحسب زاوية قطاع αi كل قيمة على حدة ونقوم برسم تلك الزاوية داخل الدائرة حتى تنتهى الدائرة. ونحسب زاوية قطاع الجزء من العلاقة :

$$\alpha i = \frac{ni}{N} \times 360$$

$$\frac{\text{التكرار الفعلى للجزء}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

مثال: الجدول التالى يوضح أعداد الطلاب ببعض أقسام الجامعة والمطلوب عرض هذه البيانات باستخدام طريقة الدائرة البيانية

القسم	الاقتصاد	علم الاجتماع	التاريخ	الجغرافيا	القانون
عدد الطلاب	650	500	400	350	550

الحل : نحسب مجموع التكرارات 550+350+400+500+650 = 2450

زاوية قطاع التاريخ:

$$\alpha_1 = \frac{650}{2450} \times 360 = 360 \times 0,228$$

إذن:

$$\alpha_1 = 95,51°$$

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

زاوية قطاع علم الاجتماع :

$$\alpha_2 = \frac{500}{2450} \times 360 = 360 \times 0{,}204$$

إذن: $\alpha_2 = 73{,}46°$

زاوية قطاع التاريخ:

$$\alpha_3 = \frac{400}{2450} \times 360 = 360 \times 0{,}163$$

إذن: $\alpha 3 = 58, 77°$

زاوية قطاع الجغرافيا:

$$\alpha_4 = \frac{350}{2450} \times 360 = 360 \times 0{,}142$$

إذن: $\alpha 4 = 51{,}42°$

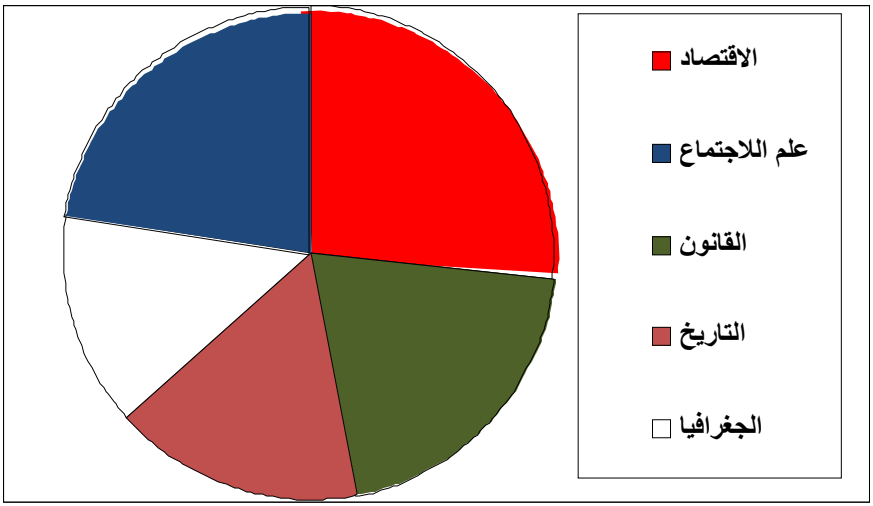
زاوية قطاع القانون $\alpha_5 = \frac{550}{2450} \times 360 = 360 \times 0{,}224$,

إذن: $\alpha 5 = 80{,}81°$

نتأكد من مجموع قيس زوايا القطاع:

$$360° = 95{,}51° + 73{,}46° + 58{,}68° + 51{,}42° + 80{,}81°$$

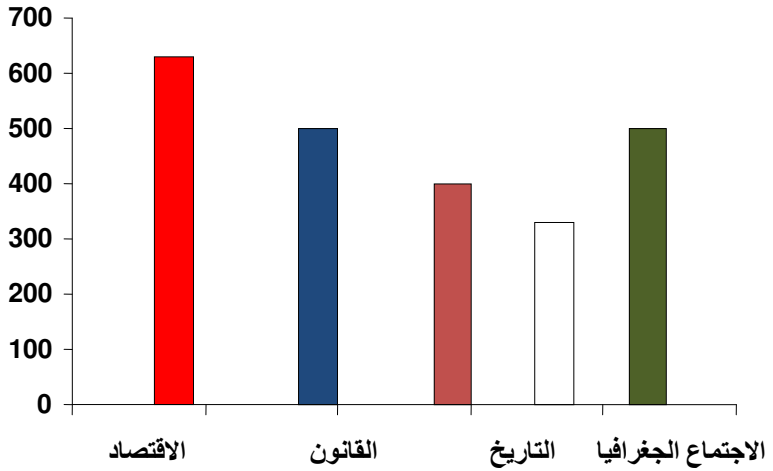
WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر



الشكل رقم 01: يمثل الدائرة البيانية (النسبية) لتوزيع الطلاب حسب عددهم في كل تخصص

3 -طريقة الأعمدة البيانية الأعمدة المستطيلة : (diagramme en colonnes) :

تسمى هذه الطريقة أيضا بطريقة الأعمدة البيانية المتجاورة وهى تشبه طريقة العمدة البيانية البسيطة ولكن يتم رسم عدد من الأعمدة المتلاصقة يمثل كل عمود إحدى قيم المتغير الإحصائي



الشكل رقم 02: الأعمدة المستطيلة

II - العرض البياني للبيانات المبوبة(متغير كمي):

والمقصود بالبيانات المبوبة تلك البيانات المقسمة إلى فئات وهناك عدة طرق لعرض البيانات المبوبة.

1 -حالة متغير كمي منقطع:

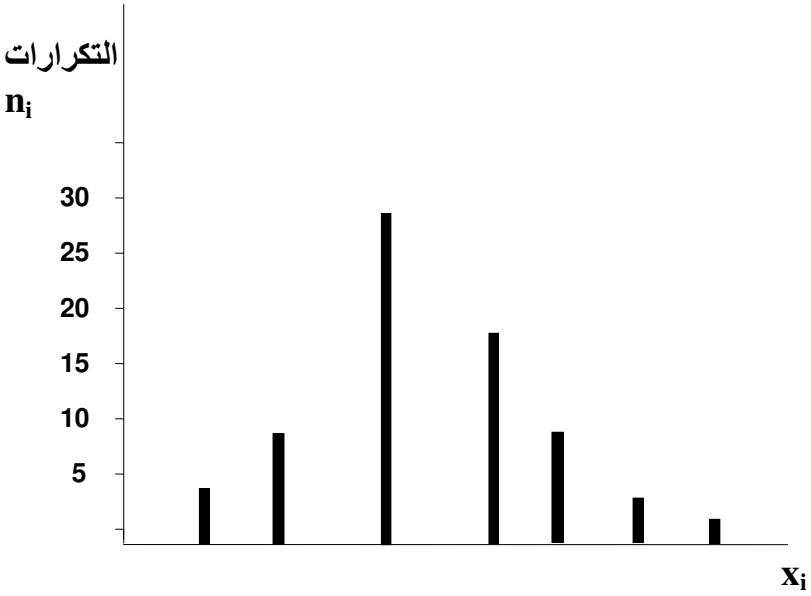
1.1 -الأعمدة البسيطة diagramme en bâtons:

هي عبارة عن أعمدة بيانية بسيطة تتناسب أطوالها مع التكرار المقابل لقيمة معينة للمتغير الكمي المنقطع المدروس (تكرارات مطلقة أو مئوية)

مثال: الجدول التالي يبين نتائج دراسة تمت في مؤسسة حول عدد الأطفال لكل عامل في المؤسسة كالتالي :

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

x_i عدد الأطفال لكل عامل	n_i التكرارات
0	5
1	01
2	03
3	20
4	11
5	04
6	02
المجموع	90



الشكل رقم 03: الأعمدة البسيطة

2 -حالة متغير كمي مستمر :

1.2 -المدرج التكراري Histogramme:

المدرج التكراري هو التمثيل البياني للجدول التكراري البسيط الخاص بالبيانات الكمية المتصلة، وهو عبارة عن أعمدة بيانية متلاصقة، حيث تمثل التكرارات على المحور الرأسي، بينما تمثل قيم المتغير (حدود الفئات) على المحور الأفقي، ويتم تمثيل كل فئة بعمود، ارتفاعه هو تكرار الفئة، وطول قاعدته هو طول الفئة.
عند رسم المدرج التكراري نميز بين حالتين : حالة أطوال الفئات متساوية و حالة أطوال الفئات غير متساوية

أ -حالة أطوال الفئات متساوية.

ب حالة أطوال الفئات غير متساوية: قبل رسم المدرج التكراري يجب أولا:

- حساب طول الفئة k لكل فئة
- حساب التكرار المعدل من العلاقة: **التكرار المعدل** $\text{nic} = \frac{ni}{ki}$

مثال: الجدول التالي يبين توزيع العمال حسب فئات أعمارهم .

فئات الأعمار	[20;25[	[25;30[	[30;35[	[35;40[	[40;45[	[45;50[	المجموع
التكرارات	2	6	9	11	7	338	

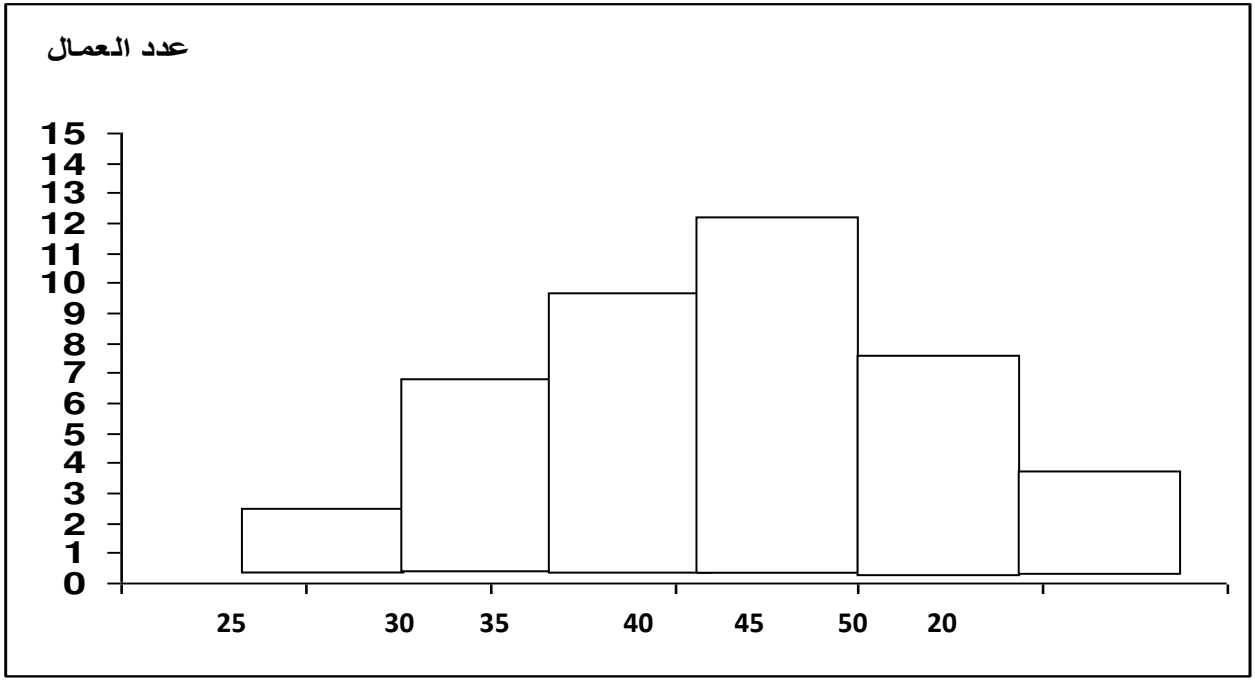
المطلوب: اعرض لهذا الجدول بيانياً باستخدام المدرج التكراري

الحل :

فئات الأعمار	[20; 25[	[25; 30[	[30; 35[	[35; 40[	[40; 45[	[45; 50[	المجموع
التكرارات	2	6	9	11	7	338	
مركز الفئة	22.5	27.5	32.5	37.5	42.5	47.5	

رسم المدرج التكراري: لرسم المدرج التكراري يتم إتباع الخطوات التالية:

- رسم محوران متعامدان، الرأسي ويمثل التكرارات (عدد العمال) ، الأفقي ويمثل فئات اعمار العمال؛
- كل فئة تمثل بعمود ارتفاعه هو تكرار الفئة، وطول قاعدته هو طول الفئة؛
- كل عمود يبدأ من حيث انتهى به عمود الفئة السابقة.



الشكل رقم 04: المدرج التكراري: أطوال الفئات المتساوية

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

مثال: حالة أطوال الفئات غير متساوية

قام مسير الموارد البشرية بإعداد الجدول التالي الذي يبين توزيع العمال في مؤسسة حسب اقدميتهم في العمل مقدرة بالسنوات.

الفئات	[6,5 ; 8[	[8 ; 9,5[	[9,5 ; 11[	[11; 12,5[	[12,5; 14[	[14;17[	المجموع
التكرارات	3	8	12	19	9	9	**60**

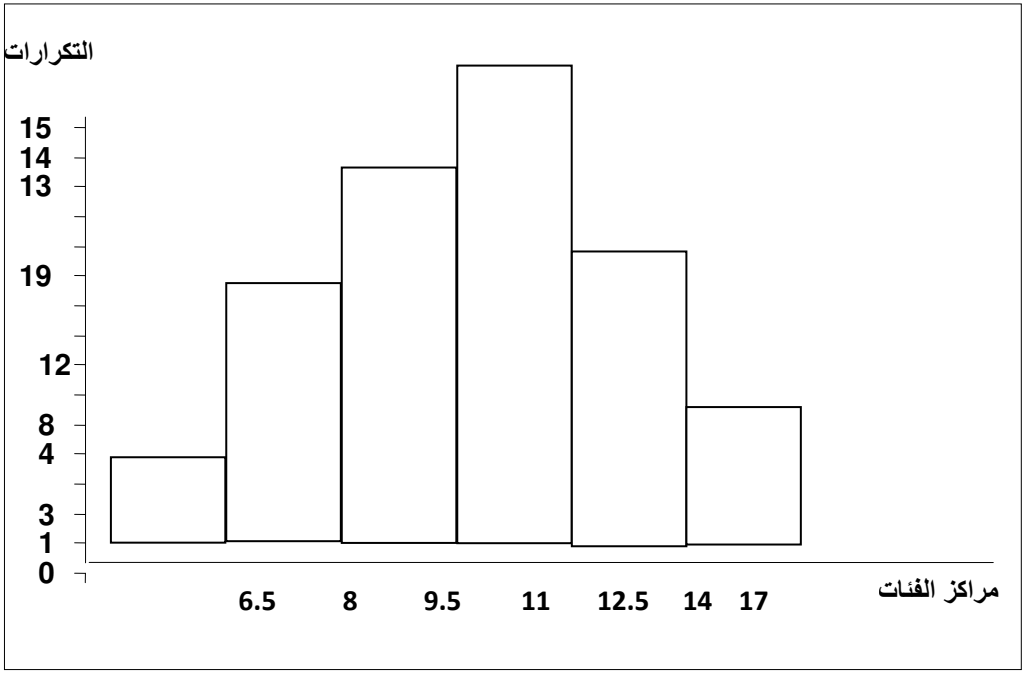
المطلوب: رسم المدرج التكراري

الحل:

نلاحظ أن أطوال الفئات غير متساوية فمن الضروري حساب التكرارات المعدلة effectifs corrigent (nic) لكل فئة نتائج الحساب تمثل في الجدول التالي :

الفئات	التكرارات ni	طول الفئة ki = bi – ai	التكرار المعدل nic = ni / ki
[6,5 ; 8[	3	**k1**=8-6.5= 1.50	3/ 1,50 = **2**
[8 ; 9,5[	8	**k2**=9.5-8= 1.50	8/1,50 = **5.33**
[9,5 ; 11[	12	**k3**=11-9.5= 1.50	12/1.50 = **8**
[11 ; 12,5[	19	**k4**=12.5-11= 1.50	19/1.50 = **12,67**
[12,5 ; 14[	9	**k5**=14-12.5= 1.50	9/1.50 = 6
[14 ; 17[	9	**k6**=17-14= 3	6/3 = **2**

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر



الشكل رقم 05: المدرج التكراري : أطوال الفئات الغير متساوية

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

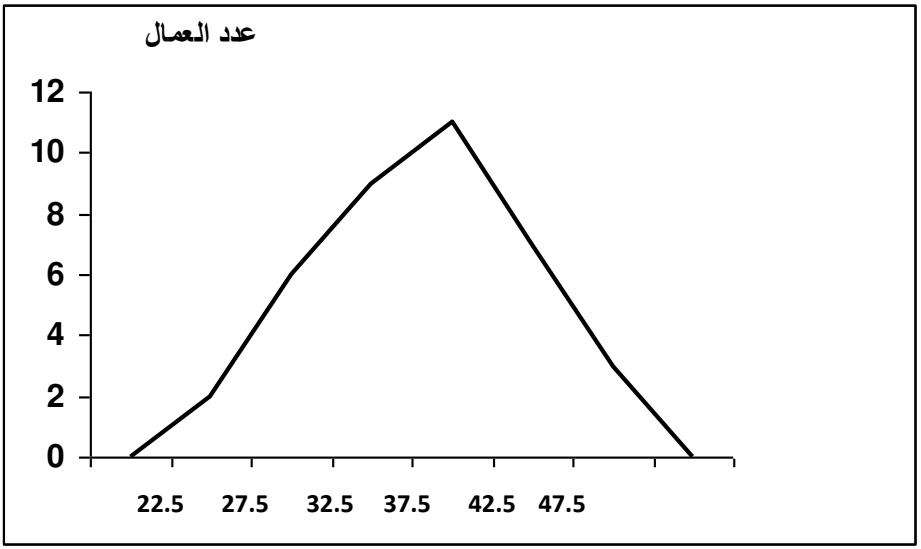
2.2 -المضلع التكراري:(polygon de frequencies)

هو تمثيل بياني أيضا للجدول التكراري البسيط، حيث تمثل التكرارات على المحور العمودي، ومراكز الفئات على المحور الأفقي.

تخصص لكل فئة وتكرارها نقطة، بحيث يكون الاحداثى السيني لها هو مركز الفئة بينما الاحداثى العيني لها هو التكرار، نفترض فئة سابقة للفئة الأولى وفئة لاحقة للفئة الأخيرة وتكرار كل منهما صفر، ثم نوصل كل نقطتين متتاليتين بخط مستقيم بالمسطرة .

مثال: أرسم المضلع التكراري للجدول الخاص بالمثال 04.

الحل:



الشكل رقم 06: المضلع التكراري

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

3.2 - المنحنى التكراري:

أ - المنحنى التكراري المتجمع الصاعد:

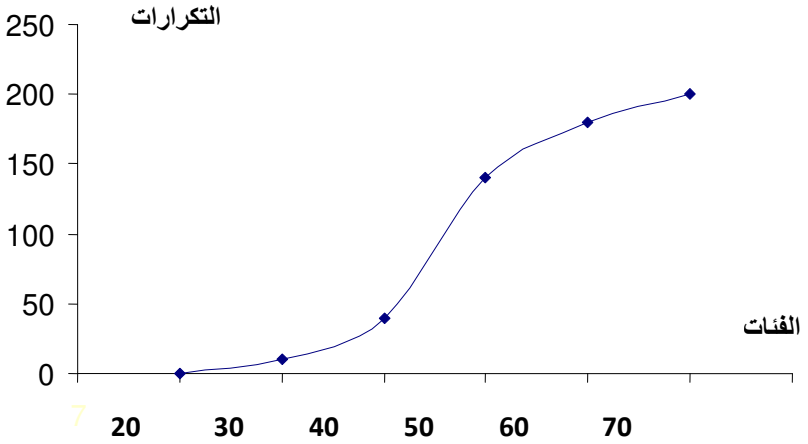
تعريف: المنحنى التكراري المتجمع الصاعد النسبي هو التمثيل البياني للتوزيع التكراري المتجمع الصاعد، حيث تمثل حدود الفئات على المحور الأفقي، و التكرار المتجمع الصاعد على المحور العمودي، ويتم تمهيد المنحنى ليمر بالإحداثيات.

مثال: الجدول التالي يوضح العلاقة بين فئات الدخل بأحد المصانع وعدد العمال والمطلوب من واقع بيانات الجدول بالرسم من جدول التكرار المتجمع الصاعد.

فئات الأجور x_i	[20- 30[	[30- 40[	[40- 50[	[50- 60[	[60- 70[
عدد العمال n_i	20	40	100	30	10

الحل : نحسب التكرارات التجميعية الصاعدة و نكون الجدول التالي :

فئات الأجور x_i	[20- 30[	[30- 40[	[40- 50[	[50- 60[	[60- 70[
عدد العمال n_i	20	40	100	30	10
التكرارات التجميعية الصاعدة nicc	20	60	160	190	200



الشكل رقم 07: المنحنى التكراري المتجمع الصاعد

ب المنحنى التكراري المتجمع النازل:

تعريف:

مثال:

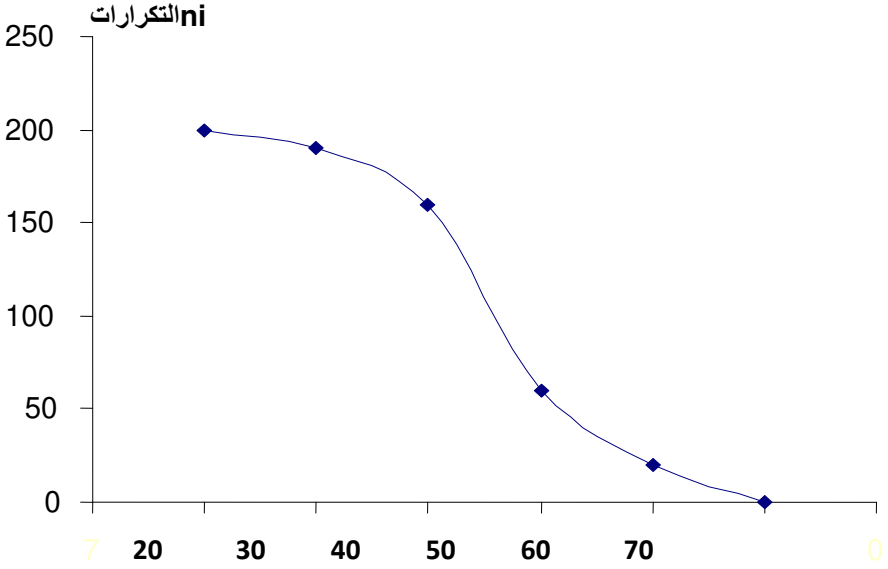
الجدول التالي يوضح العلاقة بين فئات الدخل بأحد المصانع وعدد العمال والمطلوب من واقع بيانات الجدول رسم المنحنى التكراري المتجمع الهابط .

فئات الأجور x_i	[20- 30[	[30- 40[	[40- 50[	[50- 60[	[60- 70[
عدد العمال n_i	20	40	100	30	10

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

الحل: إنشاء الجدول التالى :

فئات الأجور x_i	[20- 30[	[30- 40[	[40- 50[	[50- 60[	[60- 70[
عدد العمال n_i	20	40	100	30	10
التكرارات التجميعية النازلة nicd	200	180	140	40	10



الشكل رقم 08 : منحنى التكرارات التجميعية النازلة

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

مراجع الدرس:

1 - تيلولت سامية , **مبادئ في الإحصاء** , مطبعة دار الحديث للكتاب الجزائر الطبعة الأولى 2009 .

2 - Jérôme Huber, **statistique descriptive, appliqué à la gestion et l'économie**, 2 ème édition 2007.

3 - Etienne bressoud, jean –Claude kahani **; statistique descriptive,** 2e éd ; Pearson France 2010

الدرس رقم 03: مقاييس النزعة المركزية

الهدف من الدرس رقم 03: في نهاية هذا الدرس، يجب أن يكون المتربص قادرا على حساب المتوسط الحسابي، الوسيط، المنوال و الربيعيات لتوزيع إحصائي.

خطة الدرس رقم 03:

مقدمة

I ـ المتوسط الحسابي

1 ـ المتوسط الحسابي البسيط
2 ـ المتوسط الحسابي المرجح

II ـ الوسيط

1 ـ تعريف الوسيط
2 ـ طريقة حساب الوسيط

III ـ المنوال

1 ـ تعريف المنوال
2 ـ طريقة حساب المنوال

IV ـ الربيعيات

1 ـ تعريف الربيعيات
2 ـ طريقة حساب الربيعيات
3 ـ تطبيقات

V ـ تمارين تطبيقية

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

مقدمة:

نسعى من وراء دراستنا لظاهرة إحصائية معينة إلى استنتاج صفة مميزة ما أو أكثر من صفة فعند دراستنا مثلا للعلامات التي تحصل عليها المتربصين في مادة الإحصاء نستنتج أن معظم العلامات تميل إلى التمركز حول نقطة أو درجة معينة وهي درجة النجاح بينما نجد أن الدرجات المتطرفة الأخرى من الدرجات المدروسة، قليلة نوعاً ما وهذه الدرجات، المتطرفة، هي الدرجات العالية جداً أو المنخفضة جداً أو كلاهما .

نسمي هذا الميل بالتمركز **أو بالنـزعة المركزية** ، ونسمي القيم التي تتمركز حولها القيم الأخرى مقاييس النـزعة المركزية « Les mesures de la tendance centrale» و لهذه المقاييس أهمية كبيرة في علم الإحصاء فهي تعطينا فكرة عامة عن قيم الظاهرة المدروسة وبالتالي مقارنة مجموعتين أو أكثر.

هناك عدة مقاييس لهذا الغرض منها المتوسط الحسابي أو المتوسط (المعدل) Moyenne، الوسيط Médiane و المنوال Mode و الربيعيات Quartiles .

قلم الجزائر | WWW.DZPEN.COM

I ـ المتوسط الحسابي:

1 ـ المتوسط الحسابي البسيط:

تعريف:

المتوسط الحسابي البسيط لمجموعة البيانات $x_1, x_2, \ldots x_n$ هو مجموع هذه البيانات مقسوماً على عددها ويرمز لذلك بالرمز $\bar{x}$ و يعطى بالعلاقة التالية:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

مثال 01:

السلسلة الإحصائية التالية تمثل عدد الأطفال في الأسرة لـ 08 أسر : 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4

المتوسط الحسابي البسيط لهذه السلسلة هو :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{0+1+1+2+2+3+3+4}{8} = \frac{16}{8} = 2.$$

2 ـ المتوسط الحسابي المرجح:

1.2 حالة متغير كمي منقطع:

إذا كانت البيانات معطاة بجدول توزيع تكراري ذو k فئة فإن المتوسط الحسابي يعطي بالعلاقة :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i$$

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

حيث أن:

n_i : التكرارات و x_i المتغيرات الإحصائية
n : عدد المتغيرات الإحصائية
x_i : قيمة المتغير من i=1 إلى غاية n

مثال 02:

الجدول الإحصائي التالي يمثل توزيع 24 طالب حسب سنهم (العمر)

التكرارات n_i	السن x_i
6	18
10	19
4	20
2	21
2	22

المطلوب : حساب المتوسط الحسابي.

حل مثال 02:

$n_i x_i$	التكرارات n_i	السن (بالسنوات) x_i
108	6	18
190	10	19
80	4	20
42	2	21
44	2	22
464		

المتوسط الحسابي يحسب كالتالي :

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i$ إذن ; $\bar{x} = \frac{464}{24} =$ **19.33 سنة**

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

2.2 - حالة متغير مستمر:

إذا كان المتغير الإحصائي المدروس كمي مستمر فان حساب المتوسط الحسابي يتم بطريقة مراكز الفئات ويحسب المتوسط الحسابي من العلاقة التالية:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} c_i n_i$$

مثال 03:

ليكن الجدول الإحصائي التالي:

الفئات xi	التكرارات ni
[5-15[	3
[15-25[	5
[25-35[	12
[35-45[	25
[45-55[	35
[55-65[	13
[65-75[	7

المطلوب: حساب المتوسط الحسابي المرجح.

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

حل المثال 03:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} c_i n_i \quad , \quad \bar{x} = \frac{4990}{92} \quad ; \quad \bar{x} = 55.23$$

الفئات	التكرارات (n_i)	مراكز الفئات (c_i)	$n_i\ c_i$
[5-15[	3	10	30
[15-25[	5	20	100
[25-35[	12	30	630
[35-45[	25	40	1000
[45-55[	35	50	1750
[55-65[	13	60	780
[65-75[	7	70	700
Total	**92**		**4990**

II - الوسيط : Médiane

1 - تعريف الوسيط:

الوسيط هو القيمة التي يتساوى على طرفيها عدد القيم بعد ترتيبها تصاعدياً بحيث تكون كل قيمة من القيم التي تسبقه أصغر منه وكل قيمة من القيم التي تليه أكبر منه . أما إذا كانت القيم مرتبة تنازلياً فتكون القيم التي تسبقه أكبر والتي تليه أصغر.

2 - طريقة حساب الوسيط :

تختلف طريقة حساب الوسيط حسب نوع المتغير الإحصائي المدروس هل هو متغير كمي منقطع أو مستمر.

1.2 -الوسيط في حالة متغير كمي منقطع (سلسلة إحصائية):

في هذه الحالة لحساب الوسيط نميز بين حالتين حسب عدد المتغيرات الإحصائية الذي يرمز له بـ **n** هل هو عدد فردي أم عدد زوجي . نميز بين حالتين هما:

-في حالة n عدد فردي:

إذا كان عدد قيم المتغيرات الإحصائية n فردياً (حيث n عدد فردي) فالوسيط هو القيمة النصفية التي تقسم هذه القيم ويرمز للوسيط بالرمز méهو القيمة التي ترتيبها $\frac{n+1}{2}$.

لحساب الوسيط في هذه الحالة نتبع الخطوات التالية :

- نحسب رتبة الوسيط و التي تساوي: $\frac{n+1}{2}$
- نرتب القيم الإحصائية ترتيبا تصاعديا أو تنازليا؛
- استخرج قيمة الوسيط من القيم المرتبة تصاعديا حسب الرتبة.

مثال 1: أوجد الوسيط لهذه البيانات: 2 1 0 0 1 2 3 .

الحل:

- رتبة الوسيط هي : $\frac{7+1}{2}=4$
- القيم 2 1 0 0 1 2 3 تصبح بعد ترتيبها تصاعدياً 0,0,1,1,2,2,3

بما أن $n=7$ والوسيط هو القيمة النصفية و رتبة الوسيط هي: $\frac{7+1}{2}=4$

0 0 1 **1** 2 2 3.

***Me* = 1**

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

-في حالة n عدد زوجي:

إذا كان n عدداً زوجياً فالوسيط هو متوسط القيمتين التي ترتيبهما $\frac{n}{2}$ و $+1$ بعد ترتيبهما تصاعديا و تنازليا.

مثال2: أوجد وسيط هذه البيانات :3 2 1 0 0 1 2,4

الحل:

القيم تصبح بعد ترتيبها تصاعدياً 0 0 1 **1** **2** 2 3 4

بما أن $n = 8$ وعددها زوجياً فإن الوسيط هو متوسط القيمتين الوسيطيتين,

$$\frac{n}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\frac{n}{2} + 1 = \frac{8}{2} + 1 = 4 + 1 = 5$$

0 0 1 **1** **2** 2 3 4

الوسيط هو المتوسط الحسابي للقيمتين **الرابعة** و **الخامسة** أي

$$mé = \frac{1+2}{2} = 1,5$$

ب- الوسيط في متغير مستمر (جداول تكرارية):

في حالة البيانات المبوبة أو الجداول التكرارية لا توجد قيمة معينة يكون لها أكبر تكرار لأن القيم تتواجد في فئات مختلفة، لذلك يمكن القول بأن هناك فئات منوالية و هي الفئات التي يقابلها أعلى تكرار. ولحساب الوسيط من البيانات المبوبة (الفئات) نتبع الخطوات التالية :

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

-نحسب ترتيب (رتبة) الوسيط العام و دالك بتقسيم مجموع التكرارات على 2 **حيث: r =** $\frac{n}{2}$ رتبة الوسيط

-نحسب عمود التكرار المتجمع الصاعد لتحديد ترتيب الفئة المتوسطية و الفئة الوسيطية هي أول فئة يزيد تكرارها المتجمع الصاعد عن $\frac{n}{2}$ أو يساويه ,حيث n مجموع التكرارات.

-نحسب قيمة الوسيط من القانون التالي :

$$mé = A + \frac{\frac{N}{2} - F(i-1)}{Nmé}.kmé$$

حيث نرمز بـ :

A الحد الأدنى للفئة المتوسطية؛

$N = \sum_{i=1}^{k} n_i$ مجموع التكرارات؛

K me : تكرار الفئة المتوسطية؛

Fi−1 : التكرار التجميعي الصاعد قبل الفئة المتوسطية؛

Nmé: تكرار الفئة المنوالية؛

K: طول الفئة.

ملاحظة هامة: طول الفئة يجب أن يكون متساوي في كل الفئات في الجدول التكراري و إذا لم تكن أطوال الفئات متساوية يجب تعديل الفئات قبل إجراء الحساب .

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

مثال 03: أوجد الوسيط لمجموعة القيم المعطاة بالجدول التالي :

الحل :

التكرار f_i	طول الفئات
3	[5-1[5
5	[5-15[2
12	[5-25[3
25	[5-35[4
35	[5-45[5
13	[5-55[6
7	[65-75[

التكرار التجميعي الصاعد ecc	مركز الفئات x_i	التكرار n_i	حدود الفئات
3	10	3	[5-1[5
8	20	5	[5-15[2
20	30	12	[5-25[3
45	40	25	[5-35[4
80	50	35	**[5-45[5**
93	60	13	[5-55[6
100	70	7	[65-75[

لاحظ عمود التكرار التجميعي الصاعد تجد أن : $\frac{n}{2} = \frac{100}{2} = 50$

التكرار التجميعي الصاعد الذي يساوي أو أكبر مباشرة من قيمة رتبة الوسيط حسب الجدول هو ; $F_i = 80$; ومنه الفئة التي يقع فيها الوسيط هي:
[45-55[

التكرار التجميعي الصاعد الذي يسبق الفئة المنوالية هو : $Fi\text{-}1 = 45$: و لدينا
$Nmé = 35$ و $K\ mé = 10$

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

وبالتالي فالفئة الخامسة تحتوي على الوسيط وحدها الأدنى 55. فبتطبيق العلاقة السابقة نجد أن وسيط البيانات هو:

$$mé = 45 + \frac{50-45}{35}10 = 46.42$$

Mé = 46 ,42

III -المنوال:

1 -تعريف:

يعرف المنوال بأنه القيمة الأكثر شيوعا أو تكرارا، ويكثر استخدامه في حالة البيانات الوصفية، لمعرفة النمط (المستوى) الشائع.

2 -طريقة حساب المنوال:

يختلف حساب المنوال حسب نوع البيانات المبوبة وغير المبوبة كما يلي:

أ -حساب المنوال في حالة البيانات غير المبوبة (متغير منقطع):

المنوال يعتبر القيمة الأكثر تكرار أو شيوعا أي القيمة التي تتكرر أكثر من القيم الأخرى في المجتمع الإحصائي .

مثال 01:

أحسب المنوال" نرمز له بـ **mo** " للسلسلة أ ثم للسلسلة ب و اللتين تمثلان الأجور اليومية التي يتقاضاها مجموعتين من العمال:

السلسلة أ : 6.8.9.10.9.8.9.11.10
السلسلة ب:5.7.8.11.11.10.11.6.1

الحل:

السلسلة أ : المنوال **mo=9** و السلسلة ب: **mo=11**

ب -حساب المنوال في حالة البيانات المبوبة (متغير مستمر) :

لحساب المنوال نميز بين حالتين هما: حالة أطوال الفئات متساوية و حالة أطوال الفئات غير متساوية.

الحالة الأولى: أطوال الفئات متساوية

-طريقة الفروق (طريقة بيرسون):

إذا كانت البيانات مبوبة في جدول توزيع تكراري و طول الفئة متساوي نحسب المنوال بطريقة الفروق من العلاقة التالية:

$$mo = a + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}.k$$

حيث أن :

- a : يرمز للحد الأدنى الفعلي للفئة المنوالية بالرمز a ؛
- نرمز لطول الفئة بالرمز k ؛
- Δ_1: يرمز إلى الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة التي قبلها؛
- Δ_2 : يرمز إلى الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة التي بعدها.

نعين الفئة المنوالية وهي الفئة التي تقابل أكبر قيمة للتكرارات:

مثال 02:

الجدول التكراري التالي يمثل توزيع 30 أسرة حسب الإنفاق الاستهلاكي الشهري لها مقدر ب ألاف الدينار

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

فئات الأجور بالآلاف الدينار	[2-5 [	[5-8 [	[8-11 [	[11-14 [	[14-17 [
عدد العمال	4	7	10	5	4

المطلوب: حساب منوال الإنفاق الشهري للأسرة، باستخدام طريقة الفروق.

الحل:

لحساب المنوال نقوم أولا بتحديد الفئة المنوالية و هي الفئة المناظرة لأكبر تكرار:] 8-11 [

الفئات	التكرارات
2 -	4
5 -	7
8 -	10
11 -	5
14 - 17	4

فئة المنوال
$A = 8$
أكبر تكرار
$d_1 = 10 - 7 = 3$
$d_2 = 10 - 5 = 5$

نطبق معادلة حساب المنوال حسب طريقة الفروق :

$$mo = a + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}.k$$

حيث : a= 8 و Δ_1= 10-7=3 و Δ_2=10-5=5 و k=3

و منه بتطبيق علاقة المنوال نجد:

$$mo = 3 + \frac{3}{3+5}.3 = 4{,}12$$

Mo = 4 ,12

-المنوال هندسيا:

يمكن حساب المنوال بيانياً (هندسياً) وذلك بعد رسم المدرج التكراري للبيانات المبوبة.

مثال 03:

ليكن جدول التوزيع التكراري التالي :

طول الفئات	التكرارات
[5-1[5	3
[5[15-2	5
[5[25-3	12
[5[35-4	25
[5[45-5	35
[5[55-6	13
[65-75[	7

المطلوب: أوجد المنوال حسابيا و بيانيا (هندسيا)

الحل:

-المنوال حسابيا:

- لدينا علاقة الفروق في حساب المنوال : $Mo = a + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}.K$

الفئة المنوالية هي :]55-45[

a = **45**, k= 55-45= **10**, Δ_1= 35-25 = **10**, Δ_2=35-13 = **12**

منه:

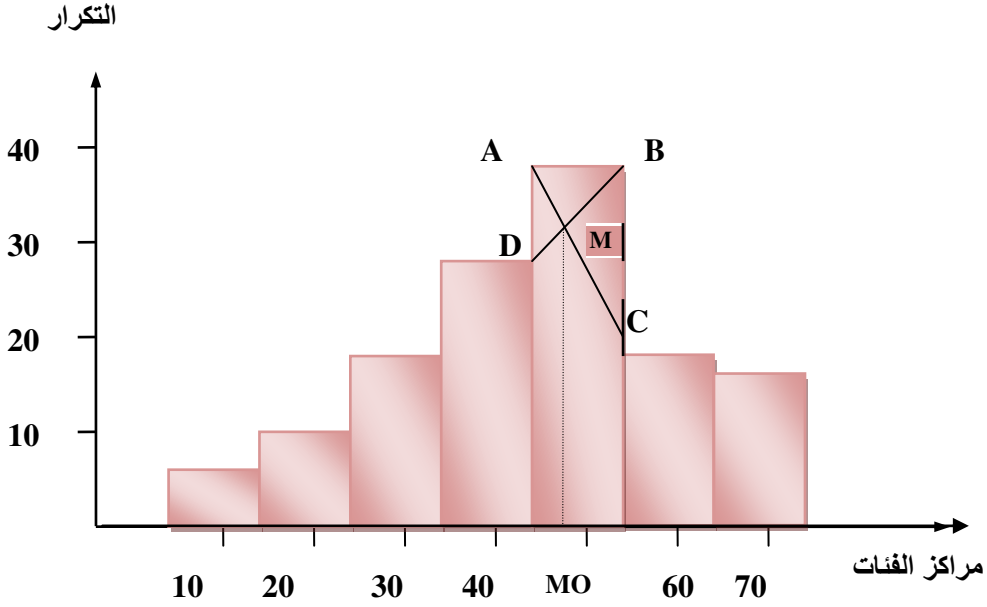
$$MO = 44.5 + \frac{35-25}{10+22} \times 10 = 47.63$$ **Mo= 47 ,63**

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

-المنوال هندسيا:

نستخرج قيمة المنوال بيانيا بالطريقة التالية:

- نرسم المدرج التكراري موضحاً الفئة المنوالية والفئة التي قبلها والفئة التي تليها؛
- نوصل بين رأس الفئة المنوالية والزاويتين المجاورتين للفئة المنوالية أي BD , AC ؛
- نسقط من نقطة الالتقاء M عموداً على محور السينات تمثل قيمة المنوال وهنا يمكن تعيين النقطة MO بشكل تقريبي وبصورة هندسية.



- الحالة الثانية: أطوال الفئات غير متساوية

إذا كانت أطوال الفئات في جدول التوزيع التكراري غير متساوية يجب تصحيح التكرارات بنفس الطريقة التي نرسم بها المدرج التكراري و نعتبر الفئة المنوالية هي الفئة التي تقابل أكبر تكرار معدل .

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

مثال 04 :

ليكن جدول التوزيع التكراري لتوزيع 60 طالب حسب علاماتهم في مادة الإحصاء :

العلامة x_i	[0- 4[	[4-8[	[8-10 [	[10-12[	[12-18[	[18-20[	المجموع
الطالب n_i	3	12	7	10	21	7	**60**

المطلوب: حساب المنوال

الحل:

نلاحظ من الجدول أن أطوال الفئات غير متساوية لذالك لحساب المنوال يجب تعديل التكرارات كمايلي :

الفئات x_i	[0- 4[	[4-8[	[8-10 [	[10-12[	[12-18[	[18-20[	المجموع
التكرارات n_i	3	12	7	10	21	7	**60**
أطوال الفئات k	4	4	2	2	6	2	
التكرار المعدل nic	0.75	3	4	**5**	3.5	3	

الفئة المنوالية التي تقابل اكبر تكرار معدل هي : [10-12

لدينا: معادل الفروق لحساب المنوال : ; $Mo = a + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}.K$

ونحسب كل من:

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

= 10-12= **2** , $\Delta 1$= 5-4 = **1** , $\Delta 2$=5-3.5 = **1.5** a = **10**, k

و منه:

Mo= 10 ,8 $$M_o = 10 + \frac{1}{1+1.5} \times 2 = 10.8$$

IV -الربيعيات Quartiles:

1 -تعريف الربيعيات:

الربيعيات هي عبارة عن ثلاثة قيم تقسم التوزيع إلى أربعة أقسام متساوية و هي:

- ✓ الربيعي الأول والذي يرمز له بـ Q_1 و يمثل 25% من الوحدات الإحصائية؛
- ✓ الربيعي الثاني والذي يرمز له بـ Q_2 و يمثل 50% من الوحدات الإحصائية و هو الوسيط و لذا طريقة حساب الربيعي الثاني هي نفسها طريقة حساب الوسيط لذا لا داعي لتكرار حساب الربيعي الثاني؛
- ✓ الربيعي الثالث والذي يرمز له ب - Q_3 و يمثل 75 % من الوحدات الإحصائية.

2 -طريقة حساب الربيعيات:

تشابه كيفية حساب الربيعيات طريقة حساب الوسيط بالاعتماد على التكرارات التجميعية و طريقة حساب الربيعيات تختلف حسب نوع المتغير الإحصائي: المنقطع و المستمر.

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

أ - **حساب الربيعيات في حالة متغير كمي منقطع:**

-الربيعي الأول Q_1: الربيعي الأول أو الأدنى هو القيمة التي ترتيبها يكون $\frac{n+1}{4}$ إذا كان الناتج صحيحاً وإذا لم يكن ناتج هذه النسبة عدداً صحيحاً فيحسب متوسط العدد الذي يقع على طرفي هذه النسبة وذلك بعد ترتيب البيانات تصاعدياً . أو أنه 25 % من هذه البيانات المرتبة تصاعدياً .

-الربيعي الثاني Q_2: الربيعي الثاني هو الوسيط نفسه Q_2 وقد تحدثنا عنه سابقاً وهو القيمة التي يكون ترتيبها $\frac{n+1}{2}$ إذا كان العدد n فردياً وهو متوسط القيمتين الوسطيتين إذا كان n عددا زوجيا وهو بالتالي 50 % من البيانات.

-الربيعي الثالث Q_3: الربيعي الثالث فهو القيمة التي ترتيبها $\frac{3(n+1)}{4}$ إذا كان ناتج هذه النسبة عدداً صحيحاً، أما إذا لم يكن ناتج النسبة عدداً صحيحاً فيحسب متوسط العدد الذي يقع على طرفي هذه النسبة وذلك بعد ترتيب البيانات تصاعدياً وأنه يحدد 75 % من هذه البيانات.

مثال 01:

لتكن السلسلة الإحصائية التالية : 2,20,3,18,4,16,6,14,8,13, 11 .
أحسب الربيعي الأول و الثالث.

الحل:

نبدأ بترتيب القيم ترتيبا تصاعديا

2,3,**4**,6,8,11,13,14,**16**,18,20
Q_1 Q_3

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

رتبة Q_1 هي: $\frac{N+1}{4}=\frac{11+1}{4}=3, Q_1=4$

رتبة Q_3 هي: $\frac{3(N+1)}{4}=\frac{3(11+1)}{4}=9, Q_3=16$

ب - حساب الربيعيات في حالة متغير كمي مستمر:

- الربيعي الأول:

نستخرج الفئة الربيعية الأولى حسب الرتبة من العلاقة : $\frac{N}{4}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} n_i$

نحسب قيمة الربيعي الأول بالعلاقة التالية :

$$Q1 = AQ1 + \frac{\frac{N}{4} - f - 1}{nQ1}.kQ1$$

حيث أن:

AQ_1: الحد الأدنى للفئة الربيعية الأولى؛

N: مجموع التكرارات $N=\sum_{i=1}^{k} n_i$

$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} n_i$: رتبة الربيعي الأول؛

K Q_1 : طول الفئة الربيعية الأولى؛

Fi−1: التكرار التجميعي الصاعد الذي يسبق الفئة الربيعية الأولى؛

NQ_1: التكرار العادي المقابل للفئة الربيعية الأولى.

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

- الربيعي الثالث:

نحسب قيمة الربيعي الثالث بالعلاقة التالية :

$$Q3 = AQ3 + \frac{\frac{3n}{2} - f - 1}{nQ3}.kQ3$$

حيث أن :

AQ_3: الحد الادني للفئة الربيعية الثالثة

N : مجموع التكرارات $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$

: $\frac{3}{4}\sum_{i=1}^{n} n_i$ رتبة الربيعي الثالث

K : طول فئة الربيعي الثالث **Q_3**

Fi−1: التكرار التجميعي الصاعد السابق لفئة الربيعي الثالث

nQ_3 : التكرار العادي المقابل لفئة الربيعي الثالث

مثال 01: ليكن التوزيع الإحصائي التالي :

فئات العلامات x_i	[90-100[	[100-110[	[110-120 [	[120-130[	[130-140[	[140-150[	[150-160[	[160-170[
التكرارات n_i	**5**	**9**	**16**	**25**	**13**	**7**	**3**	**2**

المطلوب : أحسب الربيعي الأول و الثالث.

الحل:

1 - حساب الربيعي الأول:

نحسب التكرارات التجميعية الصاعدة كالتالي :

فئات العلامات x_i	[90- 100[	[100-110[	**[110-120 [**	[120-130[	**[130-140[**	[140-150[	[150-160[	[160-170[
التكرارات n_i	5	9	**16**	25	**13**	7	3	2
Ecc ت ت ص	5	**14**	30	55	68	75	78	80

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

رتبة الربيعي الأول هي: $\frac{3}{4}\sum_{i=1}^{n} n_i = \frac{80}{4} = 20$

و منه الفئة الربيعية الأولى هي : **[110-120]**

نحسب Q3 من العلاقة:

$$Q3 = AQ3 + \frac{\frac{3n}{2} - f - 1}{nQ3}.kQ3;$$

حيث أن:

AQ_1**= 110,** F-1 **= 14 ; K** $\mathbf{Q_1}$ =120-110=10; $\mathbf{nQ_1}$**= 16**

و من نتيجة الحساب :

$$Q1 = 110 + \frac{20-14}{16}.10 \quad \mathbf{=113,75}$$

- حساب الربيعي الثالث $\mathbf{Q_3}$**:**

رتبة الربيعي الثالث هي: $\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} n_i = \frac{3x80}{4} = 60$

و منه الفئة الربيعية الثالثة هي **[130-140]** و نحسب Q_3 بالعلاقة **:**

$$Q3 = AQ3 + \frac{\frac{3n}{2} - f - 1}{nQ3}.kQ3 \quad ;$$

AQ_3**= 130,** F-1 **= 55; K** $\mathbf{Q_3}$ =140-130=10 ; $\mathbf{nQ_3}$**= 13**

حيث أن: $Q3 = 130 + \frac{60-55}{13}.10$ **=133,84**

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

V - تمارين تطبيقية:

التمرين الأول:

في دراسة شملت 100 إمرأة ممن تقل أعمارهن عن 40 سنة حسب عدد الأطفال كانت النتائج كالتالي:

عدد النساء (n_i)	عدد الأطفال (x_i)
10	0
20	1
20	2
30	3
20	4

1 - ما هي خصائص التوزيع الإحصائي (المجتمع، المتغير الإحصائي،الخاصية)

2 - ما هو التمثيل البياني المناسب.

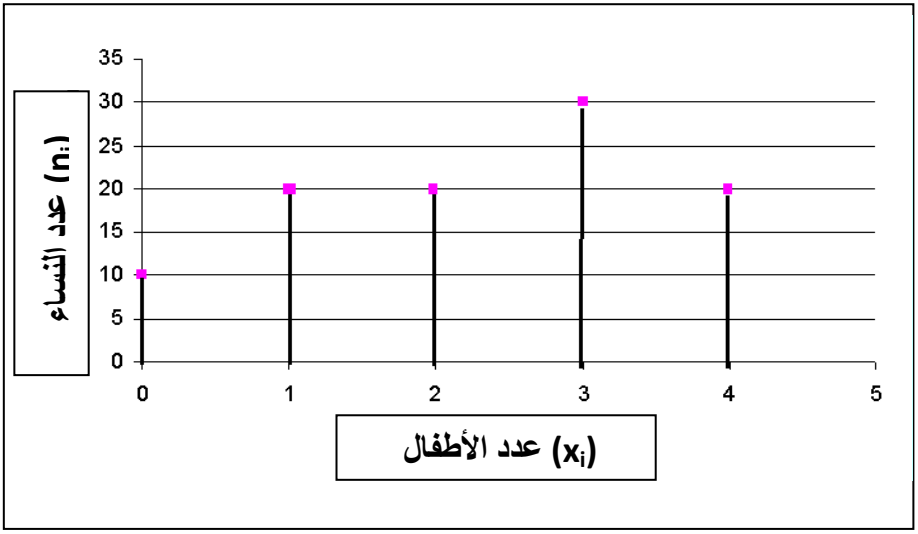
الحل:

- **المجتمع الإحصائي:** 100 امرأة ممن تقل أعمارهم عن 40 سنة؛
- **الوحدة الإحصائية:** المرأة؛
- **المتغير الإحصائي:** عدد الأطفال. نوعه : متغير كمي منقطع.

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

2 -التمثيل البياني:

المتغير الإحصائي المدروس كمي منقطع و منه التمثيل البياني المناسب هو الأعمدة البسيطة (Diagramme en bâtons).



التمرين الثاني:

الجدول الإحصائي التالي يمثل توزيع 200 عامل في مؤسسة حسب مبلغ الدخل السنوي مقدرة بكيلو دينار:

فئات الدخل السنوي (kDA)	التكرارات (n_i)
[50,60[	20
[60,70[	60
[70,90[	50
[90,100[	40
[100,130[	30

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

المطلوب:

1 -أوجد قيمة المنوال بياني؛
2 -أحسب المنوال جبريا .
3 -أحسب الوسيط
4 -أحسب معدل الدخل السنوي
5 -أحسب الربيعي الأول و الربيعي الثالث

الحل:

1 - حساب متوسط الدخل السنوي

فئات الدخل	n_i	k_i	nic	ecc	F_i	C_i	$n_i C_i$
[50,60[	20	10	2	20	0	55	1100
[60,70[	60	10	6	80	0,1	65	3900
[70,90[	50	20	5/2	**130**	0,4	80	4000
[90,100[	40	10	4	170	0,65	95	3800
[100,130[	30	30	1	200	0,85	115	3450
Total	**200**				**1**		**16250**

من علاقة حساب المتوسط الحسابي المرجح نحسب قيمة متوسط الدخل السنوي كما يلي :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i n_i C_i = \frac{1}{200} \times 16250 = 81{,}25$$

x = 81,25

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

2 -حساب الوسيط:

نحسب الوسيط بالعلاقة التالية :

$$mé = A + \frac{\frac{N}{2} - F(i-1)}{Nmé}.kmé$$

نستخرج الفئة الوسيطية:

لدينا: $\frac{N}{2} = \frac{200}{2} = 100$

من الجدول أعلاه نلاحظ أن قيمة التكرار التجميعي الصاعد التي تساوي أو أكبر مباشرة من قيمة 100 هي 130 و منه فئة الوسيط هي 70-90

و يكون لدينا Fi = 130 Fi-1= 80, nme = 50 ; t K m = 20 ومنه:

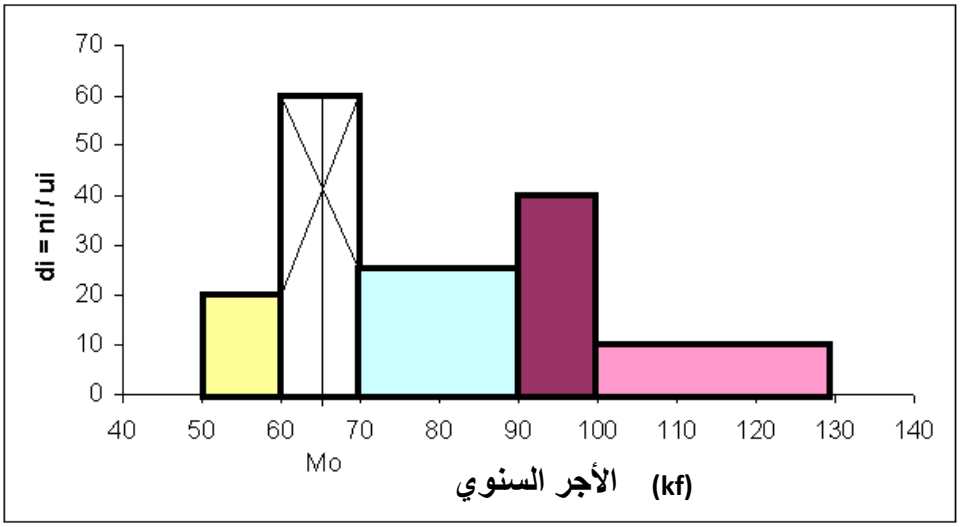
$$mé = 70 + \frac{100-80}{50}20 = 78$$

Me = 78

3 -إيجاد المنوال بيانيا:

لاستخراج قيمة المنوال بيانيا يجب رسم المدرج التكراري بشرط أن تكون أطوال الفئات متساوية، و نلاحظ من الجدول التكراري أن أطوال الفئات غير متساوية مما يتطلب تعديلها وحساب التكرارات المعدلة ثم نرسم المدرج التكراري التالي:

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر



4 -حساب المنوال:

باستعمال علاقة الفروق:

$$Mo = a + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}.K$$

نستخرج الفئة المنوالية التي تقابل أكبر تكرار معدل هي : [60, 70[

$$\Delta_1 = 60 - 20 = 40 \; ; \; \Delta_2 = 60 - 25 = 35 \; ; \; a_2 = 10 \quad d'où$$
$$M_o = 60 + 10\frac{40}{40 + 35} = 60 + 5{,}33 = 65{,}33$$

M_O= 65.33

5 -حساب الربيعي الأول Q_1:

رتبة الربيعي الاول $= \frac{200}{4} = 50$ $= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} n_i$ $= \frac{N}{4}$

نستخرج فئة الربيعي الأول من حساب:

و منه تكون الفئة الربيعية الأولى هي: [60,70[

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

و بتطبيق علاقة الحساب التالية:

$$Q1 = AQ1 + \frac{\frac{N}{4} - f - 1}{nQ1}.kQ1$$

و لدينا:

AQ1= **60,** F-1 = **20** ; **K Q1** =70-60=10 ; **nQ1= 60**

$$Q_1 = 60 + \frac{50-20}{60}.10 = \mathbf{65}$$

$Q_1 = 65$

6 - حساب الربيعي الثالث Q_3:

رتبة الربيعي الثالث هي $\frac{3x200}{4} = 150$, $\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} n_i$:

و منه الفئة الربيعية الثالثة هي : $[90,100[$ **و نحسب قيمة الربيعي الثالث من العلاقة:**

$$Q_3 = AQ_3 + \frac{\frac{3n}{2} - f - 1}{nQ_3}.kQ_3$$

AQ$_3$= **90,** F-1 = **130 ;** **K Q$_3$** =10;

$$Q_3 = 90 + \frac{150-130}{40}.10 = \mathbf{95}$$

$Q_3 = 95$

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

مقدمة:

وسوف نتناول في هذا الدرس دراسة البيانات التي يكون لأفرادها متغيران معا في وقت واحد. وذلك لمعرفة نوع العلاقة التي تربط بينهما، مثل دراسة العلاقة بين أوزان و أطوال مجموعة من التلاميذ أو أعمار و درجات مجموعة من المتربصين ..الخ . ثم إيجاد مقاييس تقيس درجة هذه العلاقة .

كذلك سنقوم بدراسة العلاقة بين المتغيرين (x, y) فان كانت هناك علاقة بين المتغير x و y فكيف يمكن التعبير عنها بمعادلة رياضية و منها يمكن التنبؤ بقيمة احد المتغيرين إذا علمنا قيمة المتغير الأخر.

وسنتناول في هذا الجزء من المادة: دراسة و تحليل العلاقة بين متغيرين، و ذلك باستخدام بعض طرق التحليل الإحصائي مثل تحليل الارتباط الذي يستعمل في دراسة العلاقة بين متغيرين، و الانحدار الخطي البسيط، الذي يستعمل في دراسة أثر أحد المتغيرين على الآخر؛ في درسين:

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

الدرس رقم 04: علاقة الارتباط Relation de corrélation

الهدف من الدرس رقم 04: في نهاية هذا الدرس، يجب أن يكون المتربص قادرا على:

- حساب معامل الارتباط بيرسون؛
- حساب معامل ارتباط الرتب سيبرمان.

خطة الدرس رقم 04:

مقدمة

I - علاقة الارتباط الخطي البسيط

1 - تعريف الارتباط
2 - الغرض من تحليل الارتباط الخطي البسيط

II - معامل الارتباط الخطى البسيط

1 - معامل الارتباط الخطى البسيط لـ " بيرسون Pearson"
2 - معامل ارتباط الرتب لـ " سبيرمان Spearman"

تمارين تطبيقية

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

I -علاقة الارتباط الخطي البسيط:

إذا كان الغرض من التحليل هو تحديد نوع و قوة العلاقة بين متغيرين، يستخدم تحليل الارتباط، و أما إذا كان الغرض هو دراسة و تحليل أثر أحد المتغيرين على الآخر، يستخدم تحليل الانحدار، و في هذا الفصل يتم عرض أسلوب تحليل الارتباط الخطي البسيط، أي في حالة افتراض أن العلاقة بين المتغيرين تأخذ الشكل الخطي.

وسنتناول في هذا الدرس علاقة الارتباط و إيجاد مقاييس لقياس قوة الارتباط بين المتغيرين (x,y) في الحالة الخطية فقط ،و سندرس معامل الارتباط الخطي لـ بيرسون (Pearson) و معامل ارتباط الرتب سبيرمان (Spearman)

1 -تعريف الارتباط:

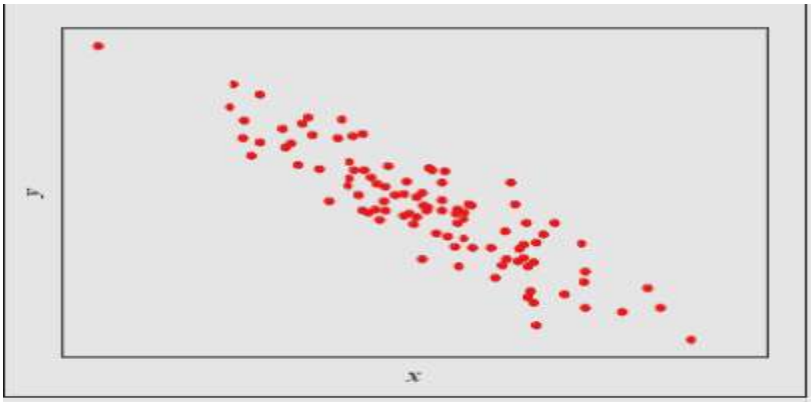
معامل الارتباط عبارة عن مقياس رقمي يقيس قوة الارتباط بين متغيرين، يرمز له بالرمز r، و تتراوح قيمته بين +1 و -1 .

و الارتباط بين ظاهرتين يشير إلى مدى وجود العلاقة بينهما و يعرف أيضا بالارتباط البسيط، مثل العلاقة بين الدخل و الاستهلاك و العلاقة بين الكمية و المطلوبة أو المعروضة و السعر ،العلاقة بين علامات الطلبة و عدد ساعات المراجعة و غيرها .

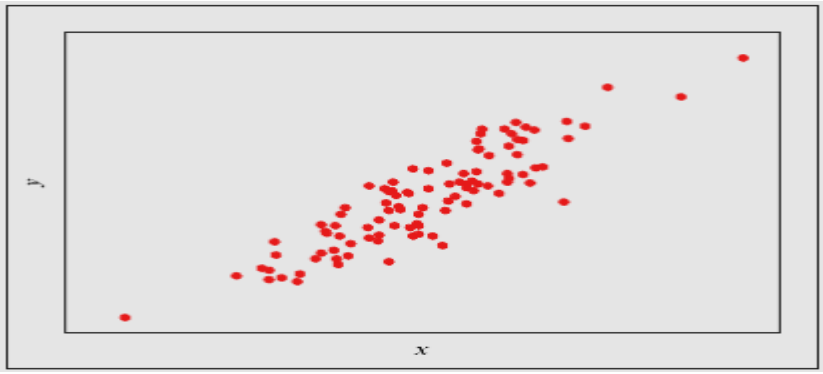
و يمكن توضيح شكل العلاقة بين متغيرين من خلال رسم كل زوج من القيم المتناظرة للمتغيرين تكوين شكل بياني يسمى بشكل الانتشار، ويوضح شكل الانتشار مدى كون العلاقة بين متغيرين خطية أم غير خطية ، قوية أو ضعيفة، طردية أم عكسية .

فإذا كان لدينا المتغيرين (x ,y) عن أزواج قيم هذين المتغيرين، و تمت مثيلها بيانيا في ما يسمى بشكل الانتشار، فإن العلاقة بينها تأخذ أشكالا مختلفة على النحو التالي:

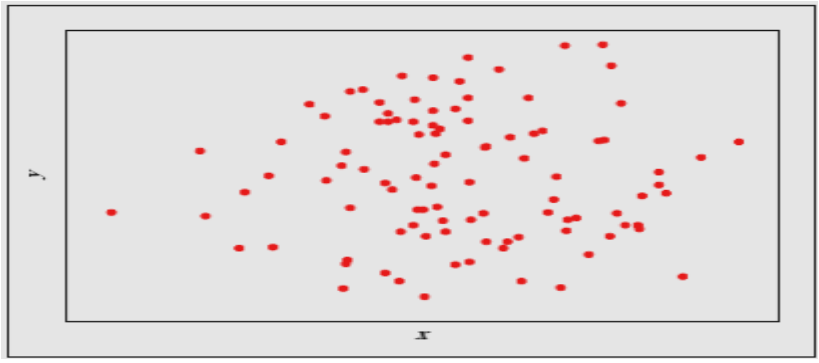
WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر



شكل الانتشار الخاص بالارتباط السلبي (العكسي)



شكل الانتشار الخاص بالارتباط الموجب (الطردي)



شكل الانتشار الخاص باستقلالية المتغيرين

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

2 -الغرض من تحليل الارتباط الخطي البسيط:

الغرض من تحليل الارتباط الخطي البسيط هو تحديد نوع و قوة العلاقة بين متغيرين، و يرمز له في حالة العينة بالرمز r حيث أننا في كثير من النواحي التطبيقية نتعامل مع بيانات عينة مسحوبة من المجتمع، سوف نهتم بحساب معامل الارتباط في العينة r كتقدير لمعامل الارتباط في المجتمع، و من التحديد السابق للغرض من معامل الارتباط، نجد أنه يركز على نقطتين هما :

1.2 -نوع العلاقة:

و تأخذ ثلاث أنواع حسب إشارة معامل الارتباط كما يلي:

أ - إذا كانت إشارة معامل الارتباط سالبة ($r < 0$) توجد علاقة عكسية بين المتغيرين، بمعنى زيادة أحد المتغيرين يصاحبه انخفاض في المتغير الثاني، و العكس.

ب إذا كانت إشارة معامل الارتباط موجبة ($r > 0$)توجد علاقة طردية بين المتغيرين، بمعنى أن زيادة أحد المتغيرين يصاحبه زيادة في المتغير الثاني، و العكس

ج إذا كان معامل الارتباط قيمته صفر ($r = 0$) دل ذلك على انعدام العلاقة بين المتغيرين.

2.2 -قوةالعلاقة:

و يمكن الحكم على قوة العلاقة من حيث درجة قربها أو بعدها عن ($\pm$) حيث أن قيمة معامل الارتباط تقع في المدى $-1 < r < 1$

قيمة معامل الارتباط	نوع الارتباط
1+	ارتباط طردي تام
من 0.7 إلى أقل 0.99	ارتباط طردي قوى
من 0.5 إلى أقل من 0.69	ارتباط طردي متوسط
من0.01 إلى أقل من 0.49	ارتباط طردي ضعيف
صفر	الارتباط منعدم
1-	ارتباط عكسي تام
من -0.7 إلى أقل -0.99	ارتباط عكسي قوى
من -0.5 إلى أقل من -0.69	ارتباط عكسي متوسط
من -0.01 إلى أقل من -0.49	ارتباط عكسي ضعيف

II -معامل الارتباط الخطى البسيط:

1 -معامل الارتباط الخطى البسيط لبيرسون Pearson:

في حالة جمع بيانات عن متغيرين كميين $(x،y)$، يمكن قياس الارتباط بينهما، باستخدام طريقة " **بيرسون Pearson"** و من الأمثلة على ذلك :قياس العلاقة بين الوزن و الطول، و العلاقة بين، الإنتاج و التكلفة، و العلاقة بين الإنفاق الاستهلاكي و الدخل، و العلاقة بين الدرجة التي حصل عليها الطالب و عدد ساعات الاستذكار، و هكذا الأمثلة على ذلك كثيرة. و لحساب معامل الارتباط في العينة، تستخدم صيغة "بيرسون "التالية:

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x \, S_y} = \frac{\frac{\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{(n-1)}}{\sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2}{(n-1)}}\sqrt{\frac{\sum (y-\bar{y})^2}{(n-1)}}}$$

حيث أن:

$(y\ ,\ x)$ هو التباين بين : $s\ xy = \sum(x-x)(y-y)\ /\ (n-1)$

(x) هو الانحراف المعياري لقيم : $Sx = \sum(x-x)2\ /(n-1)$

(y) هو الانحراف المعياري لقيم: $S\ y = \sum(\ y-y)2\ /\ (n-1)$

و يمكن اختصار الصيغة السابقة على النحو التالي:

$$r = \frac{\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum (x-\bar{x})^2}\sqrt{\sum (y-\bar{y})^2}}$$

يمكن تبسيط صيغة حساب معامل الارتباط لبيرسون الى صيغة أسهل تعتمد على مجموع القيم وليس على انحرافات القيم عن وسطها الحسابي، وهذه الصيغة هي:

$$r = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sqrt{\left(\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}\right)\left(\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}\right)}}$$

مثال 01: أحسب معامل الارتباط لبيرسون في السلسلتين الإحصائيتين التاليتين:

x_i	12	5	9	7	3	6
y_i	1	3	5	0	1	2

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

الحل:

1 - نحسب معامل الارتباط بيرسون من العلاقة الأولى:

$$r = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x - \bar{x})^2}\sqrt{\sum (y - \bar{y})^2}}$$

ولتطبيق العلاقة وإجراء الحسابات الضرورية نستعين بجدول الحسابات التالي:

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
12	1	5	-1	-5	25	1
5	3	-2	1	-2	4	1
9	5	2	3	6	4	9
7	0	0	-2	0	0	4
3	1	-4	-1	4	16	1
6	2	-1	0	0	1	0
42	**12**	0	0	**3**	**50**	**16**

حساب:

$$\bar{x}\ \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i}{n} = \frac{42}{6} = 7$$

حساب:

$$\bar{y}\ \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{6} y_i}{n} = \frac{12}{6} = 2$$

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

$\sqrt{(50)} = 7.071$ ، $\sqrt{(16)} = 4$

$$r = \frac{(3)}{(\sqrt{50})(\sqrt{16})} = \frac{3}{28.28} = 0.106 \Rightarrow$$ **r = 0,106**

2 ـ نحسب معامل الارتباط من العلاقة الثانية:

$$r = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sqrt{\left(\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}\right)\left(\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}\right)}}$$

x_i	y_i	xy	x^2	y^2
12	1	12	144	1
5	3	15	25	9
9	5	45	81	25
7	0	0	49	0
3	1	3	9	1
6	2	12	36	4
42	**12**	87	**344**	**40**

$$r = \frac{87 - 45.12/6}{\sqrt{(344 - (42).(42)/6).(40 - (12).(12)/6)}} = \frac{3}{28.28} = \mathbf{0.106}$$

وهي نفس النتيجة السابقة: **r = 0,106**

2 معامل ارتباط الرتب لـ سبيرمان Spearman:

تعريفه:

معامل ارتباط سبيرمان (Spearman) أو معامل ارتباط الرتب: هو أقل دقة من معامل ارتباط بيرسون ويتعامل مع البيانات الرقمية (المتغيرات الإحصائية الكمية) وغير الرقمية (المتغيرات الإحصائية الكيفية) للترتيب مثل جيد، جيد جدا, ... ويرمز له بالرمز r_s وهو ضمن الإحصاءات غير المعلمية ذات التوزيع الحر وقيمته موجبة أقل أو تساوي الواحد الصحيح وتحسب قيمته من الصيغة الرياضية علماً بأن:

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)}$$

d: هو الفرق بين رتبه حسب المتغير الأول x ورتبه حسب المتغير الثاني y (الفرق بين رتب القيم لكل زوج من البيانات) وفي حالة التساوي يأخذ المتوسط الحسابي (فإذا كانت لقيمتين متساويتين الرتبتين 7، 8 فيأخذ متوسط 7، 8 وتصبح الرتب لكل منها 7.5 بدل عن 7، 8).

n: هو عدد الأزواج للقيم فإذا كان لدينا مجموعة من الأفراد وجرى ترتيبهم حسب صفتين لكل فرد من المجموعةx ، yفإن. $d_i = x_i - y_i$

طريقة حسابه:

لحساب **معامل سبيرمان** لارتباط الرتب نقوم بترتيب كل من المتغيرين ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً (أما تصاعدياً لكلا المتغيرين أو تنازلياً لكليهما). وفي حالة الترتيب التصاعدي تأخذ أقل قيمة من قيم المتغير الرتبة رقم 1، والقيمة الأعلى منها مباشرة الرتبة رقم 2 وهكذا (بالنسبة لكل من المتغيرين). أما في حالة الترتيب التنازلي تأخذ أكبر قيمة من قيم المتغير الرتبة رقم 1، والقيمة الأقل منها مباشرة الرتبة رقم 2 وهكذا (بالنسبة لكل من المتغيرين). وعند تساوي قيمتين (أو أكثر) من قيم المتغير نعطي كل قيمة رتبة مختلفة (كما لو كانت القيم غير متساوية) ثم نحسب متوسط هذه الرتب، ويعطى هذا المتوسط لكل من هذه القيم المتساوية. وبعد ترتيب المتغيرين نحسب الفروق بين رتب

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

كل المتغيرين (نرمز للفروق عادة بالرمز d) ثم نقوم بتربيع هذه الفروق ونحصل على مجموعها ثم نعوض في معامل سبيرمان لارتبط الرتب .

ملاحظات: مما سبق نستطيع إجمال بعضاً من الملاحظات فيما يلي :

- مجموع الفروق بين الرتب يساوي صفر.

- أن قيمة معامل ارتباط الرتب تنحصر بين – 1، + 1 فإذا كانت الرتبة رقم 1 للمتغير الأول تناظرها الرتبة 1 للمتغير الثاني، والرتبة 2 للمتغير الأول تناظرها الرتبة رقم 2 للمتغير الثاني، وهكذا.. فإن معامل ارتباط الرتب يساوي + 1 (ارتباط طردي تام بين الرتب).

- وإذا كانت الرتبة رقم 1 (أقل رتبة) للمتغير الأول تناظرها أعلى رتبة للمتغير الثاني وهكذا.. فإن معامل ارتباط الرتب يساوي – 1 (ارتباط عكسي تام بين الرتب).
- كذلك نلاحظ أن مجموع الرتب لكل من المتغيرين يساوي:

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

مثال 01: يبين الجدول التالي الدرجة التقديرية التي تحصل عليها 06 متربصين في امتحاني الإحصاء و الرياضيات

المطلوب: أحسب معامل ارتباط الرتب لـ **سبيرمان.**

رقم المتربص	1	2	3	4	5	6
درجة تقدير الرياضيات x_i	ضعيف	ممتاز	جيد	ضعيف جدا	مقبول	جيد جدا
درجة تقدير الإحصاء y_i	مقبول	جيد جدا	جيد	ضعيف	ضعيف جدا	ممتاز

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

الحل:

أولا: نرتب الدرجات التقديرية ترتيبا تصاعديا بالنسبة لمادتي الرياضيات و الإحصاء

الدرجة التقديرية في الرياضيات		الدرجة التقديرية في الإحصاء	
الدرجة	الترتيب	الدرجة	الترتيب
ممتاز	1	ممتاز	**1**
جيد جدا	2	جيد جدا	**2**
جيد	3	جيد	**3**
مقبول	4	مقبول	**4**
ضعيف	5	ضعيف	**5**
ضعيف جدا	6	ضعيف جدا	**6**

ثانيا: نحسب الفروق بين الدرجات التقديرية للمادتين حسب الجدول التالي :

الدرجة التقديرية للرياضيات x_i	الدرجة التقديرية للإحصاء y_i	ترتيب الرياضيات x_i	ترتيب الإحصاء y_i	d_i	d_i^2
ضعيف	مقبول	5	4	1	1
ممتاز	جيد جدا	1	2	1-	1
جيد	جيد	3	3	0	0
ضعيف جدا	ضعيف	6	5	1	1
مقبول	ضعيف جدا	2	6	-2	4
جيد جدا	ممتاز	4	1	1	1
المجموع					**8**

نحسب قيمة معامل الارتباط الرتبي من العلاقة:

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)}$$

$$r_s = \frac{6(8)}{6(36-1)} = 0.772$$

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

النتيجة: علاقة الارتباط بين تقديرات مادتي الإحصاء و الرياضيات طردية.

مثال 02: الجدول التالي يمثل مجموع العلامات التي تحصل عليها 10 في السداسي الأول و السداسي الثاني:

رقم المتربص	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
علامات السداسي الأول x_i	73	80	70	66	89	71	65	88	92	74
علامات السداسي الثاني y_i	69	78	66	70	92	64	55	90	88	72

المطلوب: احسب معامل ارتباط الرتب لـ **سبيرمان.**

الحل:

الترتيب	علامات السداسي الثاني y_i	الترتيب	علامات السداسي الأول x_i
1	92	1	92
2	90	2	89
3	88	3	88
4	78	4	80
5	72	5	74
6	70	6	73
7	69	7	71
8	66	8	70
9	65	9	66
10	64	10	65

نرتب علامات المتربصين ترتيبا تنازليا أو تصاعديا حسب الجدول التالي:

d_i^2	d_i	الترتيب	علامات السداسي الثاني y_i	الترتيب	علامات السداسي الأول x_i
1	**-1**	7	69	6	73
0	**0**	4	78	4	80
0	**0**	8	66	8	70
9	**3**	6	70	9	66
1	**1**	1	92	2	89
4	**2-**	9	64	7	71
0	**0**	10	55	10	65
1	**1**	2	90	3	88
4	**2-**	3	88	1	92
0	**0**	5	72	5	74

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

نحسب الفروق بين الرتب:

تطبيق قانون معامل ارتباط الرتب سبيرمان نجد :

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{6 \times 20}{10(100-1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{120}{990}$$

$$r_s = 1 - 0.121$$

$$r_s = 0.879$$

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

تمارين تطبيقية:

التمرين الأول:

البيانات التالية تعبر عن كميات الزيتون المنتجة بالطن (y) ومقدار السماد المستخدم بالـ كلغ (x) خلال سبع سنوات :

Yi	3	4	6	3	5	4	8	33
Xi	1	2	5	3	2	1	4	18

المطلوب: حساب معامل الارتباط الخطي البسيط.

التمرين الثاني:

الجدول التالي يبن المساحة المزروعة بالأعلاف الخضراء بالألف هكتار، و إجمالي إنتاج اللحوم بالألف طن، خلال الفترة من1995 حتى عام 2002 :

السنة	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
المساحة	305	313	297	289	233	214	240	217
الكمية	592	603	662	607	635	699	719	747

المطلوب: حساب معامل الارتباط بين المساحة و الكمية، و ما هو مدلوله؟

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

التمرين الثالث:

البيانات التالية تمثل إجابات عينة من سبعة أشخاص حول برنامج الضمان الاجتماعي و مدة ملائمتها للناس:

الرقم	1	2	3	4	5	6	7
السؤال الأول	جيدة	مقبولة	ممتازة	جيدة	جيدو جدا	مقبولة	جيدة
السؤال الثاني	جيدة جدا	مقبولة	جيدة جدا	جيدة	جيدة	جيدة	ممتازة

المطلوب: حساب معامل سبيرمان للارتباط الرتب بين السؤالين و تحديد نوع العلاقة بينهما.

التمرين الرابع:

البيانات التالية تمثل عدد الساعات التي قضاها عشرة متربصين في المراجعة و العلامات التي تحصلوا عليها

رقم المتربص	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
عدد الساعات x_i	10	6	12	14	11	6	19	16	3	9
العلامات y_i	60	48	83	76	74	58	98	89	37	69

المطلوب: أحسب معامل سبيرمان لارتباط الرتب .

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

حلول التمارين التطبيقية:

حل التمرين الأول :

x_i	y_i	$x_i y_i$	x^2	y^2
1	3	3	1	9
2	4	8	4	16
5	6	30	25	36
3	3	9	9	9
2	5	10	4	25
1	4	4	1	16
4	8	32	16	64
18	**33**	**96**	**60**	**175**

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i}{n} = \frac{18}{7} = 2.57 \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{6} y_i}{n} = \frac{33}{7} = 4.71$$

$$r = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sqrt{\left(\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}\right)\left(\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}\right)}}$$

$$= \frac{\frac{96}{7} - (2.57)(4.71)}{\sqrt{\left(6 - \frac{(2.57)^2}{7}\right)\left(175 - \frac{(4.71)^2}{7}\right)}}$$

$$= 0.68$$

هناك علاقة ارتباط طردي موجب متوسط بين كمية السماد و الزيتون.

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

حل التمرين الثاني:

نفرض أن (x) هي المساحة المزروعة،و (y) هي الكمية ،ولحساب معامل الارتباط بين x) ، (y نطبق معادلة الارتباط بيرسون .

$$r = \frac{\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum (x-\bar{x})^2}\sqrt{\sum (y-\bar{y})^2}}$$

نحسب الوسط الحسابي لكل من المساحة المزروعة و كمية الإنتاج ونستعين بجدول الحساب التالي : $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i}{n} = \frac{2108}{8} = 236.5$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{8} y_i}{n} = \frac{5264}{8} = 658$$

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
305	592	41.5	-66	-2739	1722.25	4356
313	603	49.5	-55	-2722.5	2450.25	3025
297	662	33.5	4	134	1122.25	16
289	607	25.5	-51	-1300.5	650.25	2601
233	635	-30.5	-23	701.5	930.25	529
214	699	-49.5	41	-2029.5	2450.25	1681
240	719	-23.5	61	-1433.5	552.25	3721
217	747	-46.5	89	-4138.5	2162.25	7921
2108	**5264**	**0**	**0**	**-13528**	**12040**	**23850**

قيمة معامل الارتباط هي :

$$r = \frac{-13528}{(109.727)(154.434)} = \frac{-13528}{16945.619} = -0{,}798 \Rightarrow$$

r = - 0,798

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

يوجد ارتباط عكسي قوي بين المساحة المزرعة، و كمية إنتاج اللحوم.

باستخدام المجاميع السابقة، وبالتطبيق صيغة الثانية مبسطة في حساب معامل الارتباط بيرسون، نجد أن معامل الارتباط قيمته هي :

$$r=\frac{\sum xy-\frac{\sum x\ \sum y}{n}}{\sqrt{\left(\sum x^2-\frac{(\sum x)^2}{n}\right)\left(\sum y^2-\frac{(\sum y)^2}{n}\right)}}$$

$$=\frac{1373536-\frac{(2108)(5264)}{8}}{\sqrt{\left(567498-\frac{(2108)^2}{8}\right)\left(3487562-\frac{(5264)^2}{8}\right)}}$$

$$=\frac{-13528}{\sqrt{(12040)(23850)}}=\frac{-13528}{16945.619}=-0.798$$

حل التمرين الثالث:

1 ـ نرتب التقديرات ترتيبا تصاعديا :

الدرجة التقديرية للسؤال الأول x_i			الدرجة التقديرية للسؤال الثاني y_i		
الدرجة		الترتيب	الدرجة		الترتيب
ممتازة		1	ممتاز		1
جيد جدا		2	جيد جدا	2	$\frac{2+3}{2}=2.5$
جيدة	3	$\frac{3+4+5}{3}=4$	جيدة جدا	3	
جيدة	4		جيدة	4	$\frac{4+5+6}{3}=5$
جيدة	5		جيدة	5	
مقبولة	6	$\frac{6+7}{2}=6.5$	جيدة	6	
مقبولة	7		مقبولة	7	

2 ـنحسب متوسط الرتب للإجابات التي تحمل نفس التقدير و نحسب الفروق بين الرتب و عند حصول إجابتين أو أكثر على التقدير نفسه نعطي لكل إجابة مبدئياً رتبة **كما لو كانوا مختلفين** ثم نحسب متوسط هذه الرتب، وهذا المتوسط هو الذي يعطى لكل إجابة. ثم نحسب الفروق بين رتب السؤالين ونرمز لها بالرمز d ثم نربع هذه الفروق فنحصل على d^2 ونعوض في القانون مع ملاحظة أن n = 7.

السؤال الأول X	السؤال الثاني Y	رتب X	رتب Y	d الفرق بين الرتب	d^2 مربعات الفرق
جيدة	جيدة جداً	4	2.5	1.5	2.25
مقبولة	مقبولة	6.5	7	- 0.5	0.25
ممتازة	جيدة جداً	1	2.5	- 1.5	2.25
جيدة	جيدة	4	5	- 1.0	1.00
جيدة جداً	جيدة	2	5	- 3.0	9.00
مقبولة	جيدة	6.5	5	1.5	2.25
جيدة	ممتازة	4	1	3.0	9.00
المجموع				**Zero**	**26.0**

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)}$$

$$r_s = \frac{6(23)}{7(49-1)} = 0.410$$

نوع العلاقة: علاقة ارتباط قوية بين إجابات الأشخاص على السؤالين

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

حل التمرين الرابع:

1 ـ نرتب عدد الساعات و العلامات ترتيبا تصاعديا:

عدد الساعات x_i			العلامات y_i		
عدد الساعات	الترتيب		العلامات	الترتيب	
10	1		ممتاز	1	
6	2		جيد جدا	2	$\frac{2+3}{2}=2.5$
12	3	$\frac{3+4+5}{3}=4$	جيدة جدا	3	
	4		جيدة	4	
جيدة	5		جيدة	5	$\frac{4+5+6}{3}=$
مقبولة	6	$\frac{6+7}{2}=6.5$	جيدة	6	

2 ـحساب مربعات الرتب من الجدول التالي

عدد الساعات X	الدرجات Y	رتب X	رتب Y	الفروق d	d^2
10	60	6	7	- 1	1.00
6	48	8.5	9	- 0.5	0.05
12	83	4	3	1	1.00
14	76	3	4	- 1	1.00
11	74	5	5	0	0
6	58	8.5	8	0.5	0.25
19	98	1	1	0	0
16	89	2	2	0	0
3	37	10	10	0	0
9	69	7	6	1	1.00
المجموع				Zero	4.50

بالتعويض في القانون حيث n=10 نحصل على قيمة معامل سبيرمان لارتباط الرتب:

$$r_s = \frac{6(4.5)}{10(100-1)} = 0.027$$

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

الدرس رقم 05: علاقة الانحدار Relation de régression

الهدف من الدرس رقم 05: في نهاية هذا الدرس، يجب أن يكون المتربص قادرا على حساب معادلة خط الانحدار و يرسمها بيانيا بدون أخطاء.

خطة الدرس رقم 05:

I -الانحدار الخطي البسيط

1 - تعريف الانحدار الخطي البسيط
2 - المتغيرات
3 - شكل الإنتشار

II - معادلة خط الانحدار

1 - تعريف معادلة خط الانحدار
2 - نموذج عن معادلة خط الانحدار
3 - شكل العلاقة بين x و y

تمارين تطبيقية

قلم الجزائر | WWW.DZPEN.COM

مقدمة:

لقد سبق لنا دراسة العلاقة بين متغيرين (x, y) و إيجاد معامل الارتباط بينهم بعدة طرق وذلك لقياس قوة الارتباط و إيجاد العلاقة بينهما (طردية – عكسية) كما في معاملي ارتباط بيرسون و سبيرمان، و في هذا الدرس سنبحث عن إيجاد معادلة رياضية تمثل أفضل توفيق لخط مستقيم يعبر عن البيانات في شكلها الخطي.

إن الهدف من الدرس هو ترجمة العلاقة التي يمكن أن توجد بين متغيرين ا أو أكثر، من خلال المعطيات الرقمية لهذه المتغيرات، إلى علاقة رياضية تحدد بنوع من الدقة طبيعة تلك العلاقة، هل هي علاقة طردية أو عكسية ؟ وما هي درجة ارتباطها، قوية أم ضعيفة ؟ و قبل ذلك ما هي العلاقة الدالية بينها، هل هي خطية أو ما يصطلح عليه بعلاقة الانحدار الخطي والتي هي موضوع هذا الدرس أو هي علاقة غير خطية ؟ و الغرض من إيجاد معادلة خط الانحدار هو التنبؤ بقيمة المتغير التابع لقيمة محددة من قيم المتغير المستقل و تسمى العلاقة بين المتغير المستقل x و المتغير التابع y بمعادلة خط الانحدار البسيط.

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

I - الانحدار الخطي البسيط:

1 - تعريف الانحدار الخطي البسيط:

الانحدار الخطي البسيط عبارة عن علاقة دالية من الدرجة الأولى تربط متغيرين مأخوذين من واقع اقتصادي أو اجتماعي معين خلال فترة محددة، احدهما تابع نرمز له بـ Y و الثاني مستقل نرمز له بـ X ، بحيث يتم إيجاد معالم الدالة الخطية (ثوابتها) بعدة طرق أهمها طريقة المربعات الصغرى.

2 - المتغيرات:

يعرف في الانحدار الخطي البسيط متغيرين أساسيين، إذا كانت لدينا القيم: y_1 , y_2 ، y_3 ... ، y_n تنجم عن القيم: x_1 ،x_2 ،x_3 .... x_n ، على التوالي، فإنه يمكن إعطاء التعريف التالي : يسمى **المتغير** بالمتغير التابع، ونرمز له بـ y_i إذا كانت كل قيمة له تتأثر تبعا لتغير قيمة متغير آخر x_i يسمى بالمتغير المستقل. فالعلاقة بين المتغيرتين هي علاقة سببية، بحيث أن تغير أحدهما مرتبط بتغير الثاني، كما هي الحالة بالنسبة لتغير استهلاك الفرد تبعا لتغير دخله، بحيث انه كلما ارتفع الدخل أدى ذلك إلى زيادة الفرد من استهلاكه من مختلف السلع و الخدمات، فالدخل هنا هو متغير مستقل تغيره يتسبب في تغير الاستهلاك في نفس الاتجاه، فالاستهلاك هو متغير تابع للدخل، و حينها يمكن القول إن العلاقة بين دخل الفرد واستهلاكه هي علاقة انحدار، بحيث أن الاستهلاك هو دالة خطية في الدخل.

3 - شكل الانتشار:

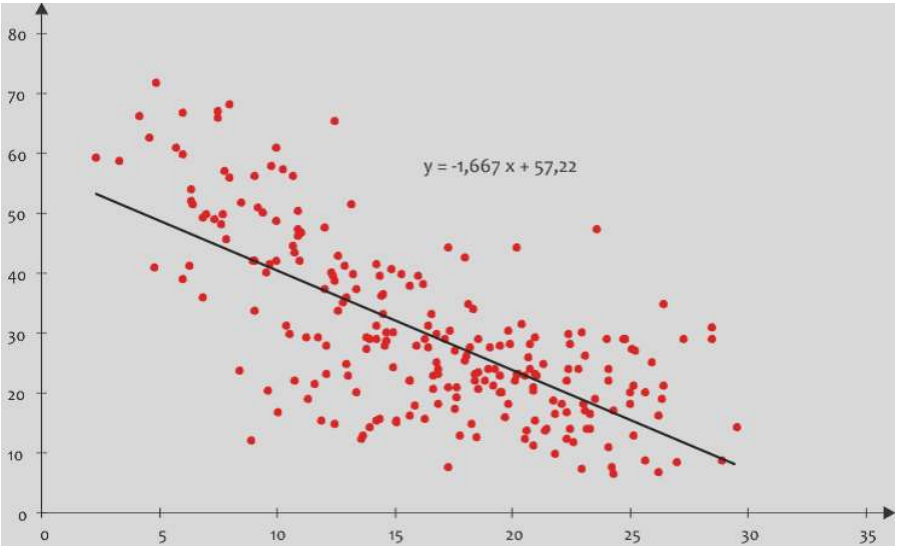
بعد تحديد المتغير المستقل والمتغير التابع، يتم رسم معلم متعامد، بحيث يوضع على المحور العمودي المتغير التابع، وعلى المحور الأفقي المتغير المستقل، ويتم بعد ذلك تحديد نقاط الأزواج المرتبة (y xi) ، لكل قيم الظاهرة. تسمى النقاط المحصل عليها، بشكل الانتشار .شكل الانتشار لظاهرة ما ذات متغيرين أحدهما تابع و الآخر مستقل، هو مجموعة نقاط (xi ,yi)، المرتبة الأزواج ، لتلك الظاهرة المجسدة على معلم متعامد .

قلم الجزائر | WWW.DZPEN.COM

II -معادلة خط الانحدار:

1 -تعريف معادلة خط الانحدار:

معادلة خط الانحدار هي معادلة رياضية تمثل أفضل خط مستقيم يعبر عن بيانات متغيرين x_i و y_i . ويستفاد من معادلة خط الانحدار في التحليل و التنبؤ بقيم احد المتغيرين عند معرفة قيمة المتغير الآخر، فإذا كانت لدينا عينة من الأزواج المرتبة للمتغيرين x و y حيث أن x هو المتغير المستقل و y هو المتغير التابع، فانه يمكن رصد هذه النقاط على الرسم البياني التالي :



إن كل نقطة على الشكل أعلاه تمثل زوجا من القيم (x ,y) و أن الوسيطين لقيم x و y يقعان على خط المستقيم الذي يسمى بمنحنى الانحدار، ويشمل منحنى الانحدار على تقديرات لجميع قيم y المناظرة لقيم x.

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

2 نموذج معادلة خط الانحدار:

يمكن عرض نموذج الانحدار الخطي في شكل معادلة خطية من الدرجة الأولى، تعكس المتغير التابع كدالة في المتغير المستقل كما يلي:

$$F(x) \Rightarrow y = a + b\,x$$

حيث نحسب قيمة a من المعادلتين التاليتين:

المعادلة الأولى:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\right]}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

المعادلة الثانية:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\,\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - n\bar{x}^{2}}$$

حيث:

n : عدد المتغيرات

$\bar{x}$: المتوسط الحسابي لقيم المتغير المستقل x_i

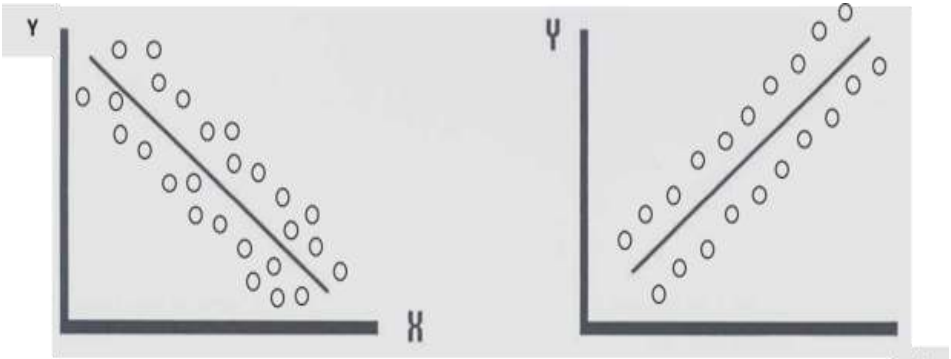
$\bar{y}$: المتوسط الحسابي لقيم المتغير التابع y_i

نحسب قيمة a من المعادلة : $a = \bar{y} - b\bar{x}$

3 شكل العلاقة بين x و y:

يمكن التميز بين 03 حالات من الأشكال تبن لنا نوع العلاقة الموجودة بين x_i و y :

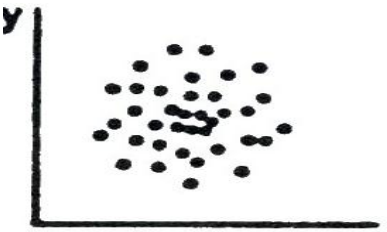
علاقة ارتباط خطي طردي:	**علاقة ارتباط خطي عكسي:**
أي كلما زاد المتغير المستقل x_i يؤدي إلى زيادة المتغير التابع y_i و العكس صحيح و دالة الانحدار الخطي في هذه الحالة هي: $y= a + b x$ حيث قيمة b موجبة + وشكل العلاقة هو الشكل الأول	أي كلما زاد المتغير المستقل x_i يؤدي إلى انخفاض المتغير التابع y_i و دالة الانحدار الخطي هي : $y= a - b x$ حيث قيمة b تكون سالبة – وشكل العلاقة بيانيا هو الشكل الثاني



الشكل الثاني (أ)
ارتباط موجب قوي
(ارتباط خطي طردي)

الشكل الثاني (ب)
ارتباط سالب قوي
(ارتباط خطي عكسي)

علاقة منعدمة: أي لا يوجد اتجاه واضح لنقاط الإحداثيات أي لا توجد علاقة خطية كما في الشكل التالي:



WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

تمارين تطبيقية:

التمرين رقم 01:

البيانات التالية تمثل كمية البروتين اليومي بالجرام التي يحتاجها العجل الرضيع،ومقدار الزيادة في وزن العجل بالكلغ في عينة من العجول الرضيعة حجمها 10 .

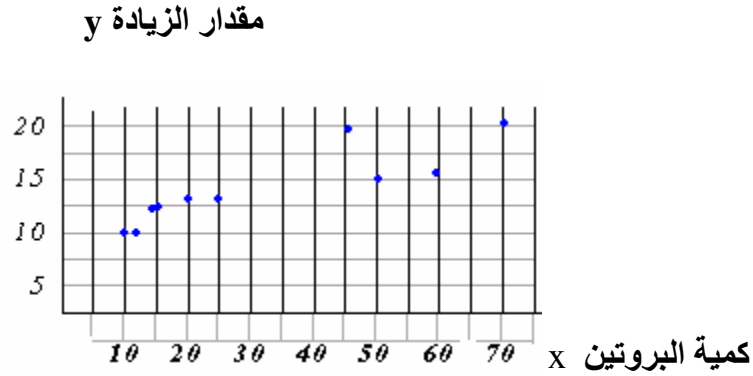
كمية البروتين	10	11	14	15	20	25	46	50	59	70
الزيادة في الحجم	10	10	12	12	13	13	19	15	16	20

المطلوب:

- ارسم نقاط الانتشار و حدد شكل العلاقة
- اوجد معادلة الانحدار بين المتغيرين
- ما هو مقدار الزيادة في الوزن عند إعطاء العجل 100 جرام من البروتين

الحل:

1 - رسم نقاط الانتشار



WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

من خلال شكل نقاط الانتشار نتوقع أن تكون العلاقة بين كمية البروتين و مقدار الوزن علاقة خطية طردية.

2 ـ تحديد معادلة الانحدار:

نفترض أن x تمثل كمية البروتين و y تمثل مقدار الزيادة في الوزن و كون بذلك معادلة مستقيم خط الانحدار هي : y=a+ bx
حساب قيمة b من العلاقة:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\,\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - n\bar{x}^{2}}$$

x_i كمية البروتين	y_i الزيادة في الوزن	$x_i y_i$	$x_i^{\,2}$
10	10	100	100
11	10	110	121
14	12	168	196
15	12	180	225
20	13	260	400
25	13	325	625
46	19	874	2116
50	15	750	**2500**
59	16	944	**3481**
70	20	1400	**4900**
320	**140**	**5111**	**14664**

$$\bar{x} = \frac{320}{10} = 32 \quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} y_i$$

$$\bar{y} = \frac{140}{10} = 14$$

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\,\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - n\bar{x}^{2}}$$

$$b = \frac{51111 - 10..14.32}{14641 - 10.32.32} = \frac{6310}{44240} = 0\ ,142$$

b = 0.142

حساب قيمة a:

نحسب قيمة a من المعادلة : $a = \bar{y} - b\bar{x}$

a = 14- 0.142. 32= 9.43 a= 9.43

ومنه تكون معادلة خط الانحدار: **y** =9 ,43+ 0.142**x**

تفسير المعادلة:
الثابت a= 9.43 يدل على أنه في حالة عدم استخدام البروتين في التغذية فإن الوزن يزيد بـ 9.44 كلغ

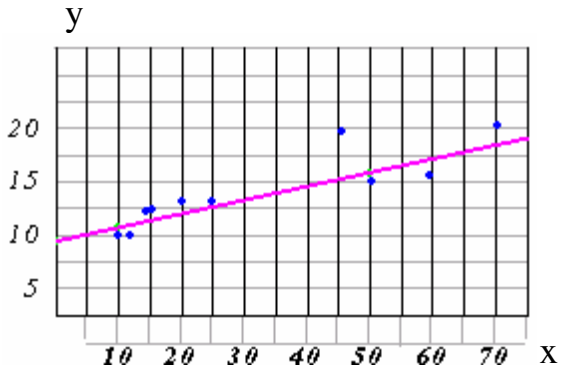
حساب مقدار الزيادة في الوزن عند x=80
نعوض قيمة x=100 في معادلة خط الانحدار فنجد :
Y = 9,43 + 0 ,142 (80) = 9,43+ 11.36 = 20.79

3- رسم معادلة خط الانحدار على نقاط الانتشار
يمكن رسم معادلة خط مستقيم إذا علم نقطتين على الخط المستقيم

x	50	10
y	16.59	10.87

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

وتكون معادلة خط الانحدار



التمرين رقم 02:

في أحد أماكن بيع السيارات كانت المبيعات كالتالي :

عمر السيارة x_i	4	1	6	5	1	1	2	3
ثمن البيع y_i	29	71	17	18	70	60	44	31

المطلوب: أوجد معادلة خط انحدار y على x

حل التمرين الثاني : إيجاد معادلة خط الانحدار

حساب قيمة b من العلاقة:

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - n\bar{x}^{2}}$$

x_i عمر السيارة	y_i ثمن البيع	$x_i y_i$	$x_i^{\,2}$
4	29	116	16
1	71	71	1
6	17	102	36
5	18	90	25
1	70	70	1
1	60	60	1
2	44	88	4
3	31	93	9
23	**340**	**690**	**93**

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{8} x_i \quad \bar{x} = \frac{23}{8} = 2.875$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{8} y_i \quad \bar{y} = \frac{340}{8} = 42.5$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - n\bar{x}^{2}} \qquad b = \frac{690 - 8.(2.87 * 42.5)}{93 - 8(8.23)} =$$

$$\frac{690 - 975.8}{27.16} = -10.52$$

b = -10.52

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

حساب قيمة a:

نحسب قيمة a من المعادلة : $a = \bar{y} - b\bar{x}$

$a = 42.5 - (-10.52).2.87 = 72.69$

a= 72.7

و منه تكون معادلة خط الانحدار: **y =72.7-**10.52**x**

مراجع الدرس:

1 - تيلولت سامية، **مبادئ في الإحصاء** ،مطبعة دار الحديث للكتاب– الجزائر،الطبعة الأولى 2009 .

2 - شرف الدين خليل، **الإحصاء الوصفي**،مكتبة شبكة الأبحاث و الدراسات الاقتصادية

قلم الجزائر | WWW.DZPEN.COM