الجمهورية الجزائرية الديمقراطيـــة الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التكوين و التعليم المهنيين

Ministère de la Formation et de l'enseignement Professionnelle

معهد التكوين و التعليم المهنيين – سيدي بلعباس -

Institut de la formation et de l'enseignement Professionnels

- SIDI BELABBES -

MANUEL TECHNIQUE ET PEDAGOGIQUE

ELECTROTECHNIQUE

MODULE

Appliquer des notions de mathématiques liées au domaine de l'électrotechnique

NIV : V

I.F.E.P

2012

WWW.DZPEN.COM | قلم الجزائر

TABLE DES MATIERES

PREAMBULE

CHAPITRE 1 : CALCUL DES INTEGRALES

1.1 Les intégrales définies
…… 10
1.1.1 Définition d'une Intégrale d'une fonction continue positive……...
.....101.1.2Définition d'une Intégrale d'une fonction continue négative
……..... …11
1.1.3Exercice…….
…….....11
1.2Lesintégrales
indéfinies…….12
1.2.1Théorème
fondamental……....12
1.2.2 Calcul d'une intégrale à l'aide d'une
primitive……12
1.2.3Fonctions primitives de fonctions
usuelles ……....12
1.2.4 Fonctions primitives de fonctions intrinsèques
…….....131.2.5Exercice
…….13
1.3Techniques de calcul
intégral ……..…….13
1.3.1Intégration par changement de
variables…….131.3.2 Intégration
partielle…….....14
1.3.3Exercice
……..14
1.4
Résumé……
…14
1.5Exercicede

synthèse……..15

CHAPITRE 2 : LES NOMBRES COMPLEXES

2.1 Ensemble des nombres
complexes.....16
2.1.1 Théorème (admis) et définitions
….....162.1.2 Forme algébrique d'un
nombre complexe……....16
2.1.3 Partie réelle, partie imaginaire
……16

2.1.4 Nombres réels et nombres imaginaires
purs……162.1.5 Egalité de deux nombres
complexes……17
2.1.6 Nullité d'un nombre complexe
……..172.1.7 Le plan
complexe……..17
2.1.8
Exercice……
17
2.2 Nombre complexe
conjugué……...18
2.2.1 Nombre complexe conjugué, nombre réel et imaginaire
pur……18
2.2.2 Opérations sur les nombres complexes
conjugués……...182.2.3 Inverse d'un nombre
complexe……...18
2.2.4Exercice
……..18
2.3 Module et
argument……182.3.1
Module d'un nombre
complexe……...18
2.3.2 Opérations sur les
modules……...192.3.3 Argument
d'un Nombre Complexe non nul……19
2.3.4 Argument d'un réel non nul, d'un imaginaire
pur……..20
2.3.5 Opérations sur les
arguments……20
2.3.6 Exercice
……21
2.4 Les différentes écritures d'un nombre complexe non
nul……21

2.4.1 Formes
trigonométriques……..21
2.4.2 Nombre complexe de module 1 (nombre complexe unitaire)
…….....21
2.4.3 Formes
exponentielles……21
2.4.4 Formules de Moivre et
Euler……...212.4.5 Exercice
……..22
2.5 Equation du second degré dans C à coefficients
réels……222.5.1Racines carrées dans
C……22
2.5.3 Exercice
…….....22

2.6
Résumé……
….23
2.7 Exercice de
synthèse……..24

CHAPITRE 3 : LES MATRICES ET DETEMINANTS

3.1 Définitions sur les matrices
……25
3.1.1Matrice
carrée……26
3.1.2Matrice
diagonale……..26
3.1.3 Matrice
unité……26
3.1.4 Matrice triangulaire
supérieure……26
3.1.5 Matrice triangulaire
inferieure……..26
3.1.6 Matrice
symétrique……26
3.1.7 Exercice
……...27
3.2Opérations sur les Matrices
……..27
3.2.1 Addition, soustraction
……27
3.2.2 Multiplication par un
nombre……27
3.2.3 Transposition
…….283.2.4
Multiplication des
Matrices……...28
3.2.5 Inversion des matrices
carrées……...29
3.2.6Déterminant d'une Matrice
carrée……30
3.2.7 Calcul de la Matrice
inverse……31
3.2.8Exercice
……..32
3.3 Application aux systèmes d'équations
linéaires……323.3.1 Formulation
matricielle……...33
3.3.2 Cas d'une Matrice
régulière……..34
3.3.3 Exercice
……34

3.4
Résumé……..
..34
3.5Exercice de

synthèse…….34

CHAPITRE 4 : Les Equations différentielles

4.1 Equations différentielles du premier
ordre……..36
4.1.1
Définition…….3
6
4.1.2Résolution de l'équation homogène
…….364.1.3 Résolution de l'équation
particulière……37
4.1.4 Résolution de l'équation
générale……374.1.5 Résolution à
partir d'un circuit électrique RC……..37
4.1.6 Exercice
…….38
4.2Equations différentielles du second
ordre……38
4.2.1
Définition…….3
8
4.2.2 Résolution de l'équation homogène
…….39
4.2.3 Résolution de l'équation
particulière……...404.2.4Résolution de
l'équation générale……..40
4.2.5 Résolution à partir d'un circuit électrique
RLC……....40
4.2.6 Exercice
…….41
4.3Résumé……
……41
4.5 Exercice de

synthèse……...42

CHAPITRE 5 :Séries de Fourier

5.1 Série de Fourier
……44
5.1.1
Définition……4
4

5.1.2 Convergence d'une série
Fourier……..45
5.1.3 Coefficients de Fourier d'une fonction
périodique……...45
5.1.3.1 calculs des
an……..45
5.1.3.2 calculs des
bn……46
5.1.4 Exercice
……46
5.2.1fonctions
paires……..47
5.2.2 fonctions
impaires……..47
5.2.3 Exercice
……47
5.3Coefficients de Fourier de la fonction
triangulaire……..47
5.3.1Fonction
triangulaire……..475.3.2
Méthode directe
……...48
5.3.3 Méthode
indirecte……48
5.3.4Fonction
carrée……..49
5.3.5 Exercice
……49
5.4
Résumé……
…..49
5.5 Exercice de

synthèse……..50

CHAPITRE 6 : Transformation de Laplace

6.1 Transformée de
Laplace……...51
6.1.1
Définition……5
1
6.1.2 Transformée de fonctions
élémentaires……52
6.1.2.1 Fonction échelon unité (fonction d'Heaviside) U(t)
……...52
6.1.2.2 Fonction impulsion unité (Distribution de
Dirac)……..52

6.1.2.3 Fonction puissance……...53
6.1.2.4Fonctionexponentielle……54
6.1.3 Exercice ……55
6.2 Propriétés de la transformée de Laplace……..556.2.1 Linéarité……55
6.2.2 Règle de similitude (Changement d'échelle)……..56
6.2.3 Règle de translation en p……..56
6.2.4 Règle de translation en t……..56
6.2.5 Transformée de la dérivée……...57
6.2.6 transformée de la primitive……..58
6.2.7 Théorème de la valeur initiale……58
6.2.8Théorème de la valeur finale……...59
6.2.9 Exercice ……59
6.3 Transmittance de Laplace – Impédance opérationnelle ……60
6.3.1 Transmittance opérationnelle……60
6.3.2 Impédance opérationnelle……60
6.3.3 Exemple : Charge d'un condensateur……61
6.3.4 Exercice ……..62
6.4 Résumé……63
6.5Exercice de synthèse……63

CHAPITRE 7 : Probabilités et Statistiques

7.1 Statistique descriptive à une variable……..65
7.1.1 Statistique descriptive à une variable ……65
7.1.1.1Tableaux statistiques et diagrammes ……65

7.1.1.2 Mode et étendue statistique
……..67
7.1.1.3 Les indicateurs de l'analyse statistique
……..68
7.1.2Statistique descriptive à deux variables
……....70
7.1.2.1Caractérisation d'une série statistique à deux variables
……..70
7.1.2.2Droite d'ajustement affine : Méthode de Mayer
……70
7.1.2.3Equation de la droite d'ajustement affine
……72
7.1.3 Exercice
……73
7.2 Analyse combinatoire
……...73
7.2.1Définitions
……73
7.2.2Compléments
……74
7.2.3Exercice
……..74
7.3 Généralités sur les probabilités
……74
7.3.1Vocabulaire spécifique des évènements
……74
7.3.2Probabilités d'un évènement
……..75
7.3.3 Probabilités conditionnelles
……76
7.3.4 Exercice
……76
7.4 Variables aléatoires
……77
7.4.1 Généralités
……77
7.4.2 Variables Aléatoires discrètes
……..78
7.4.2.1 Couple de variables Aléatoires discrètes
……78
7.4.2.2 Opérations sur les variables Aléatoires
discrètes……79
7.4.2.3Principales lois de probabilités variables Aléatoires discrètes
……...80
7.4.3 Variables Aléatoires continue
……..81
7.4.3.1 Espérance mathématique E(X)
……...81
7.4.3.2 Variance et écart-type
……82

7.4.4 Exercice
…….82
7.5Résumé
……82
7.6Exercice de
synthèse……..82

Résumégénéral …….....84
Activité de
synthèse…….....86
Bibliographie……
……..88
Annexe 1 (corrigé des
exercices)…….…..92

PREAMBULE

La finalité de l'enseignement de l'électrotechnique est de familiariser les stagiaires techniciens supérieurs avec les notions **mathématiques** qui sont propres à cette spécialité afin de leur permettre de réfléchir, d'analyser et de résoudre des problèmes dans n'importe quelle situation de leur vie quotidienne et professionnelle.

L'enseignement de première année aborde l'étude des **mathématiques** comme premier module complémentaire C1 intitulé :

« Appliquer des notions de mathématiques liées au domaine de l'électrotechnique »

Le manuel couvre dans **le premier chapitre** le calcul et l'application des intégrales simples, définies et indéfinies qui servent comme base dans l'électronique de puissance ainsi qu'en asservissement et régulation, en le complétant avec des exercices se rapportant à l'électronique

Au deuxième chapitreon va étudier les nombres complexes avec quelques applications qui sont nécessaires dans les courants alternatifs ainsi qu'en machines électriques et l'asservissement.

Au troisième chapitre, il sera question de l'étude des matrices qui est un outil pratique en électricité concernant la loi de Kirchhoff.

Le quatrième chapitre est consacré à l'application des équations différentielles pour la résolution des problèmes techniques particuliers comme les filtres en électronique et en asservissement.

Au cinquième chapitre, on va faire l'application des séries de Fourier à la décomposition des signaux dans la commande des moteurs et dans l'asservissement des machines électriques.

Au sixième chapitre, on va étudier la transformée de LAPLACE qui est utilisée dans la résolution des problèmes techniques d'asservissement et de régulation des différents paramètres des machines électriques.

Le septième chapitreest consacré à l'application des probabilités et statistiques qui vous seront toujours utiles dans votre vie professionnelle, par exemple, le transport de l'énergie électrique.

PRESENTATION DU METIER

Branche professionnelle :

Electricité – Electronique-Energétique

Présentation de la profession :

Dénomination de la profession : Technicien Supérieur en Electrotechnique.

Définition de la profession :

Le technicien supérieur en électrotechnique doit être capable :

- De concevoir et de mettre en œuvre des installations électriques,
- D'assurer la maintenance des équipements de puissance électriques,
- De diagnostiquer et repérer les causes de mauvais fonctionnement des équipements électriques,
- De réparer les équipements et d'effectuer les différents réglages,
- D'assurer le suivi des installations et des équipements, ainsi que leur gestion.

Tâches essentielles :

L'électrotechnicien, pour assumer convenablement ses tâches, doit acquérir et maîtriser les domaines techniques spécifiques à cette activité. Il doit s'imprégner et s'accommoder à l'environnement du monde du travail, pour accomplir convenablement ses tâches :

- Etudier et relever des caractéristiques sur site et élaborer des plans et schémas d'installation.
- Réaliser les installations électriques d'éclairage et les mettre en service.
- Réaliser les installations électriques et les mettre en service.
- Réaliser les installations de distribution B.T.
- Installer des machines électriques et équipements de production.
- Maintenir et réparer les installations électriques.
- Exploiter le réseau électrique.
- Diagnostiquer les pannes et remplacer les composants défectueux.
- Régler, modifier et remplacer les éléments mécaniques, électriques, électroniques et d'automatisme.
- Maintenir les machines électriques.
- Tester et démarrer les installations électriques.
- Gérer, organiser et évaluer les coûts de travaux de maintenance.
- Evaluer les coûts de maintenance.
- Exploiter et gérer la documentation technique.
- Gérer le stock

Conditions de travail :

Lieu de travail :

Atelier de travaux et réparation, ou sur chantier.

Eclairage :

- Normal
- D'appoint dans le lieu d'intervention (lampe amovible, torche électrique, …).

Température :

- En fonction du lieu de travail.

Humidité :

- Taux inférieur à 70%.

Bruit et vibration :

- Bruits de machines électriques.

Poussière :

- Selon le milieu du travail.

Risques professionnels :

- Risque d'électrocution,
- Chocs,
- Brûlure et blessure.

Contacts sociaux :

- Relations avec les collègues de travail,
- Relations avec les responsables hiérarchiques et subordonnés,
- Travail seul ou en équipe (selon besoin).

Exigence de la profession :

Physique :

- Jouir d'une bonne constitution physique.

Intellectuelles :

- Esprit d'initiative,
- Niveau d'abstraction,
- Esprit d'analyse et de synthèse.

FICHE DE PRESENTATION DU MODULE

Module : Appliquer des notions de mathématiques liées au domaine de l'électrotechnique.

Code du module : MC 1

Durée : 119 heures

Objectif modulaire

Comportement attendu :

Le stagiaire doit être capable de :

- Faire des calculs différentiels et intégraux.
- Utiliser les nombres complexes.
- Utiliser les statistiques.
- Appliquer les séries de Fourrier.
- Appliquer les transformées de Laplace.

Conditions d'évaluation :

A partir de :

- Documentation appropriée.

A l'aide de :

- Calculatrice scientifique.
- Logiciels.

Critères généraux de performance :

- Application correcte des règles de calcul,
- Résolution exacte des équations.

Objectif modulaire (suite)

Objectifs intermédiaires	Critères particuliers de performance
1. Calculer les intégrales	- Calcul et application corrects des intégrales simples, définies et indéfinies
2. Etudier les nombres complexes.	-Application appropriée des nombres complexes.
3. Etudier les matrices et calculer les déterminants.	-Etude appropriée des matrices et leurs applications. -Calcul correct des déterminants.
4. Etudier et appliquer les équations différentielles.	-Application correcte des équations différentielles pour la résolution des problèmes techniques particuliers.
5. Etudier les séries de Fourier.	-Application correcte des séries de Fourier à la décomposition des signaux.
6. Etudier les transformées de Laplace.	-Utilisation appropriée des transformations de Laplace pour la résolution des problèmes techniques de régulation
7. Etudier et appliquer les probabilités et statistiques	-Application appropriée des probabilités et statistiques

CHAPITRE 1

CALCUL DES INTEGRALES

Quelque part sur la terre, il y a un champ qui est coincé entre une route et une rivière. Le propriétaire du champ meure et on doit le partager en 3 parties égales pour ses héritiers. On doit donc connaître sa surface, son aire. C'est l'objectif de ce chapitre.

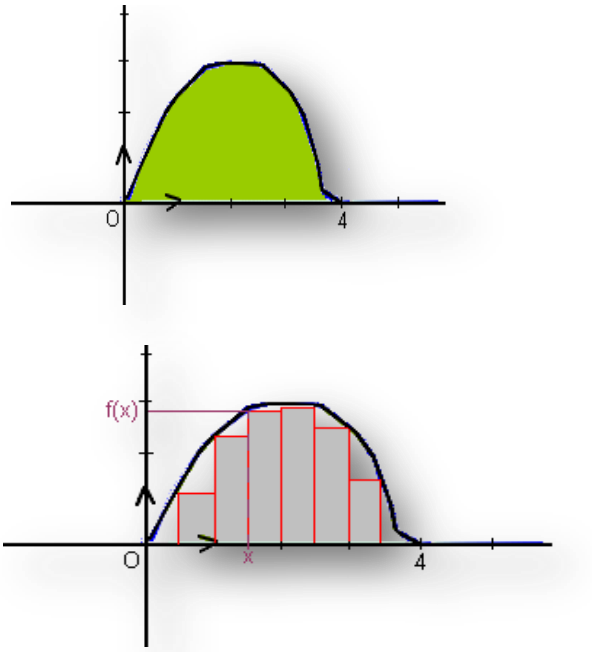
1.1 Les Intégrales Définies

D'abord éliminons toutes les données qui ne nous sont pas utiles et plaçons ce champ dans un repère. Pour connaitre l'aire sous la courbe, traçons dessous des rectangles assez larges. On sait calculer l'aire d'un rectangle (longueur fois largeur), donc en les additionnant tous on trouvera un nombre un peu inférieur à l'aire que l'on cherche. C'est assez théorique mais en fait l'aire sous la courbe est égale à la somme des aires d'une infinité de rectangles ayant une largeur infiniment petite. La largeur infiniment petite est notée dx. C'est une variation infinitésimale de x.

La hauteur de chaque rectangle est de f(x). Le signe $\int$ se lit "**somme**" mais on dit plus souvent "**intégrale**", et l'aire sous la courbe vaut donc : $\int_0^4 f(x)dx$, c'est à dire la somme pour x parcourant les valeurs de 0 à 4 des f(x) fois dérivée de x.

(Se prononce "intégrale de 0 à 4 de f(x)dx").

Figure 1 : Champ dans un repère



1.1.1 Définition d'une Intégrale d'une fonction continue positive

L'aire du domaine situé sous la courbe C est appelée « intégrale de la fonction *f* De*a* à *b* »

Notée : $\int_a^b f(x)dx = \mathrm{F(b)} - \mathrm{F(a)}$

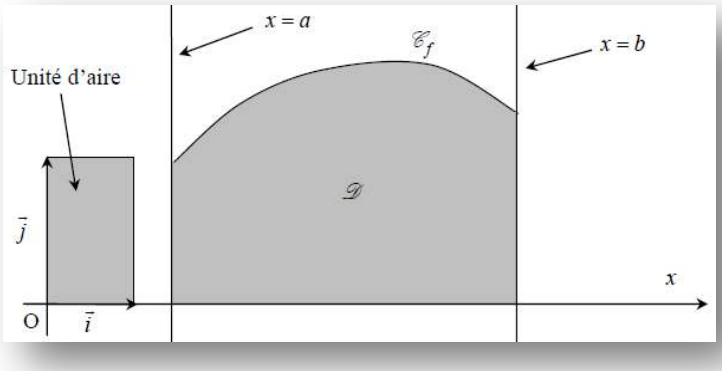
Ce réel ***F(b) – F(a)*** s'appelle l'intégrale de ***f*** entre ***a*** et ***b***.

On dit aussi « intégrale de ***a*** à ***b*** de ***f*** ».

Les réels *a* et *b* sont appelés « **les bornes** » de l'intégrale ; *a* est la borne inférieure et *b* la borne supérieure.

Elle est exprimée en « unité d'aire », l'unité d'aire étant définie comme l'aire du rectangle construit à partir du repère orthogonal considéré (Figure ci-dessous).

Figure 2 :domaine d'une fonction positive



Soulignons le cas particulier : lorsque *a* = *b*, le domaine sous la courbe se réduit à un segment et son aire est nulle : $\int_a^b f(x)dx = 0$

1.1.2Définition d'une Intégrale d'une fonction continue négative Sur un intervalle [a ;b]

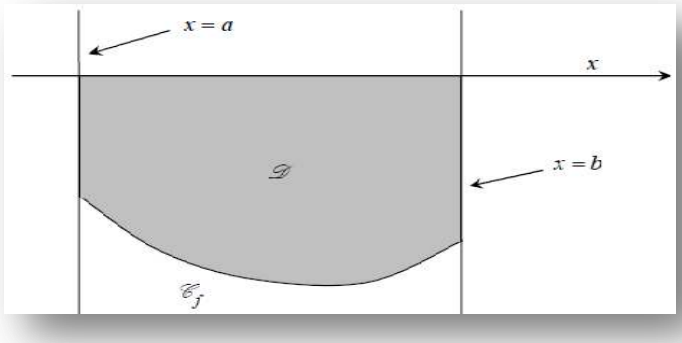
Le domaine $\mathcal{D}$ considéré (voir la figure ci-dessous) est cette fois l'ensemble des points

$(x; y)$ du plan vérifiant :a $\leq$x $\leq$b

F(x) $\leq$ y $\leq$0

Si on note $\mathcal{A}$ $(\mathcal{D})$ l'aire de ce domaine on a, par définition : $\int_a^b f(x)dx = -AD$

Figure 3 : domaine d'une fonction négative



1.1.3Exercice

Indiquer si la réponse suivante est vraie ou fausse.
L'intégrale définie de la fonction suivante : f(x) = x^2 + 4x ; Sur un intervalle I= [0 ; 4]
Est égale à 20

1.2LesIntégrales Indéfinies

Maintenant on a le même champ sauf, on ne connait pas ses limites alors on procède de la même manière, le résultat obtenu on lui rajoute une constante K.

1.2.1 Théorème fondamental

Soit ***f*** une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I. Alors une fonction G est une primitive de ***f*** sur I si et seulement s'il existe un réel k tel que G(x) = F(x) + k pour tout x de I.

1.2.2 Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive

On considère deux fonctions F et ***f*** définies sur un même intervalle I.

Dire que F est une primitive de ***f*** sur I signifie que F est dérivable sur I et que pour tout x de I, F'(x) = ***f*** (x).

F : x ⟶ x^4 est une primitive sur IR de ***f*** : x ⟶ 4 x^3

Car **F'(x) = 4x ^{3} = *f* (x)**

1.2.3 Familles de fonctions primitives : Primitives usuelles

Elles sont obtenues par lecture à l'envers du tableau des dérivées des fonctions usuelles.la lettre **n** désigne un entier naturel.

Figure4 :primitives usuelles

Fonction	Primitive	Intervalle de validité I
$x \mapsto a$	$x \mapsto ax$	$I \subset \mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$I \subset \mathbb{R}$ avec $n \neq -1$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ avec $n \geq 2$	$x \mapsto \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	$I \subset \mathbb{R}^*$
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$x \mapsto \frac{-1}{x}$	$I \subset \mathbb{R}^*$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$	$I \subset \mathbb{R}^{*+}$

1.2.4 Fonctions primitives de fonctions intrinsèques

Figure5 : primitives de fonctions intrinsèques

Fonction	Primitive	Intervalle de validité I

$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$I \subset \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln\lvert x\rvert$	$I \subset \mathbb{R}^*$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x)$	$I \subset \mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x)$	$I \subset \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$	$x \mapsto \tan(x)$	$I \subset \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right\}$

1.2.5Exercice

Parmi les primitives suivantes, quelle est la primitive de la fonction donnée :
$f(x) = 2x + 1/x^3$

A. $F(x)= x^2 - 1/2x^4 + C$
B. $F(x)=2x^3/3 + C$
C. $F(x)= 1/2x^4 + C$

1.3Techniques de calcul intégral

Ces techniques sont particulièrement utiles pour établir des relations de récurrence entre des intégrales, et pour calculer des intégrales de fonctions dérivées simples comme le Logarithme **Ln**, Exponentiel **Exp** ou les fonctions trigonométriques.

Sans oublier leur utilisation dans les circuits électriques, et enfin de compte pour calculer les valeurs moyennes d'un signal.

1.3.1Intégration par changement de variables.

Soit φ une fonction de classe C sur [a; b], dont les valeurs sont dans I.

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$$

Expliquons concrètement la méthode. $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$,

On pose u =φ(t)(changement de variable, donné ou à trouver).

Si t vaut a (respectivement. b), alors u vaut $\varphi(a)$ (respectivementφ (b)), ce qui conduit à changer les bornes de l'intégrale.

Ensuite, du/dt=φ '(t), ou encore (bien que cette écriture soit formellement incorrecte au niveau BTS) du = φ '(t) dt ; que l'on remplace dans l'intégrale.

1.3.2 Intégration partielle

De la formule **(u.v)'=u'v+v'u:** Si deux fonctions sont égales alors leurs intégrales sont égales, donc :

$$\int_a^b (u(x)v(x))'dx = \int_a^b (u'(x)v(x)+u(x)v'(x))dx$$

Comme la primitive de la dérivée d'une fonction c'est la fonction elle-même et que l'intégrale d'une somme de fonctions est égale à la somme des intégrales, alors :

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Donc en changeant de côté :

$$[u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Et en inversant l'égalité :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

C'est la **formule d'intégration par parties**.

1.3.3Exercice

En effectuant une intégration par parties, de: $\int_1^2$ x ln x dx

La réponse correspond à: A. F (1) +F(2)= -3/4

B. F (2)-F (1) = -3/4 +2 Ln 2

C. F (2)-F (1) = Ln 2

1.4 Résumé

Dans cette partie on a vu comment se fait le calcul d'une **aire** à partir d'une intégrale.

On peut considérer que l'on assimile une petite portion d'aire à un rectangle de hauteur f(x) et de largeur dx, et on intègre (on somme) de a à b.

Notée: $\int_a^b f(x)dx = \text{F (b)} - \text{F (a)}$

On pourra procéder de même pour calculer une distance ou un volume.

Une primitive d'une fonction f, c'est une fonction F telle que F' = f.

En mathématiques, l'**intégration par parties**, **le changement de variable**sont deux méthodes qui permettent de transformer l'intégrale de fonctions en d'autres intégrales, dans un but de simplification du calcul.

1.5Exercice de synthèse

Spécialité : Electrotechnique

Module : Appliquer des notions de mathématiques liées au domaine de l'électrotechnique

Durée : 30 mn

But :c'est de familiariser les stagiaires à appliquer les techniques de calcul intégral dans le domaine de l'électricité.

Matériel requis :

- Calculatrice
- Documents appropriés

Mise en situation :

Intensité efficace.

Soit i(t) = Im. Sin (ω. t); l'intensité instantanée d'un courant alternatif de période T telle
que ω =2π/T.

Marche à suivre :

1) Exprimer l'énergie dissipée dans une résistance R pendant un intervalle de temps dt.
2) Exprimer l'énergie moyenne dissipée pendant une période T.
3) Soit I_{eff} l'intensité du courant continu qui dissipe dans la résistance R la même énergie pendant un intervalle de temps égale à T.
En déduire la relation neutre I_{eff} et Im. I_{eff} est appelée intensité efficace.

CHAPITRE 2

LES NOMBRES COMPLEXES

Les nombres complexes, tels que nous les utilisons aujourd'hui, datent du XIXème siècle. Ils étaient connus sous le nom de nombres imaginaires (terme qui est resté dans l'expression "partie imaginaire"). Ils sont apparus lorsque l'on a essayé de résoudre les équations du 3ème degré. Le premier à avoir résolu des équations du 3ème degré du type $x3 + px = q$ ($p > 0$, $q > 0$) semble être SCIPIONE Del Ferro (1465 – 1526), professeur à l'université de Bologne. Leurs intérêt nous est très pratique en électrotechnique.

2.1 Ensemble des nombres complexes

Depuis Gauss (1777 – 1855), on a adopté une représentation géométrique des complexes. Si on munit le plan d'un repère orthonormé, alors le complexe $z = a+ib$

Peut se représenter :

– par le vecteur de composantes (a,b), vecteur dit d'affixe z.

– par le point de coordonnées (a,b), point dit d'affixe z.

2.1.1 Théorèmes et définitions

Il existe un ensemble C noté et appelé ensemble des nombres complexes, qui vérifie les propriétés suivantes :

• L'ensemble C contient l'ensemble des nombres réels ;

• Il existe dans C une addition et une multiplication qui ont les mêmes propriétés que leurs homologues dans R ;

• Il existe dans C un nombre complexe noté i tel que $i^2 = -1$;

• Pour tout nombre complexe z il existe un unique couple (a, b) de réels

Tel que z = a + ib.

2.1.2 Forme algébrique d'un nombre complexe

L'égalité z = a + ib est la forme algébrique du nombre complexe z.

2.1.3 Partie réelle, partie imaginaire

Le nombre réel a s'appelle la partie réelle de znotée (**Re (z)**), le nombre réel b s'appelle la partie imaginaire de znotée **(Im(z)**).

On note : a = Re(z) et b = Im(z). Par conséquent z = Re(z) + i Im(z).

Exemple :

Re(3 – 5i) = 3 et Im(3 – 5i) = – 5

2.1.4 Nombres réels et nombres imaginaires purs

Un nombre complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle.
On appelle imaginaire pur tout nombre complexe dont la partie réelle est nulle.

Le réel 0 est le seul nombre complexe qui est réel et imaginaire pur.

2.1.5 Egalité de deux nombres complexes

L'égalité de deux nombres complexes
$a + ib = a' + ib'$
Équivaut à $a = a'$ et $b = b'$.
Exemple :

$x + iy = 3 - 5i$ équivaut à $x = 3$ et $y = -5$

2.1.6 Nullité d'un nombre complexe

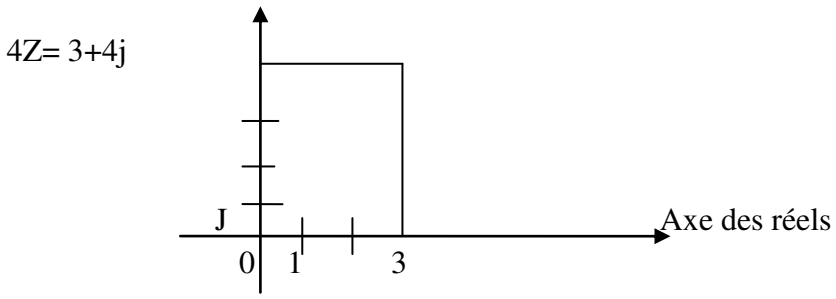
Nullité d'un nombre complexe

En particulier $a + ib = 0$ équivaut à $a = 0$ et $b = 0$.

2.1.7 Le plan complexe

Le plan complexe désigne un plan dont chaque point est la représentation graphique d'un nombre complexe.
Exemple : $Z = 3 + 4j$ (En mathématiques, on utilise i à la place de j)

Figure 6 : le plan complexe



En abscisse, nous avons la partie réelle.

En ordonnée, nous avons la partie imaginaire.

2.1.8 Exercice

Associez chacun des réponses à son nombre complexe:

Le nombre complexe	la partie réelle	la partie imaginaire
5,2 i – 2,5	π	1
nombre réel π	– 2,5	0
nombre imaginaire i	0	5,2

2.2 Nombre complexe conjugué

Soit z= x + iy un nombre complexe avec x et y réels.
Le conjugué de z est le nombre complexe $\bar{z}$= x –iy.

Exemple :

Le conjugué de 3 − 5i est 3 +5i.

Le conjugué de −7 est −7 car −7 = −7 + 0i et son conjugué sera −7 − 0i = −7.

2.2.1 Nombre complexe conjugué, nombre réel et imaginaire pur

Soit z un nombre complexe :
z est réel si et seulement si z = $\bar{z}$;
z est un imaginaire pur si et seulement si z = $-\bar{z}$.

2.2.2 Opérations sur les nombres complexes conjugués

Pour tous complexes z et z'

$\overline{(z+z')} = \bar{z} + \overline{z'}$

$\overline{(zxz')} = \bar{z}$ x $\overline{z'}$

$\overline{(z/z')} = \bar{z} / \overline{z'}$ z'≠0

$\overline{(1/z')} = 1 / \overline{z'}$ z'≠0

$\overline{(-z)} = - \bar{z}$

2.2.3 Inverse d'un nombre complexe

Soit z = x + iy un complexe non nul, avec x et y réels.
Pour déterminer partie réelle et partie imaginaire de :

1/z =1/ x+iy, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué de z :

$1/z = \bar{z} / z\bar{z}$ = x-iy / $x^2 + y^2$ = (x / $x^2 + y^2$) + i (-y / $x^2 + y^2$)

2.2.4Exercice

Soit z = 3- i5. Le produit de z avec son conjugué est : 34 **V F**

Encercler V si c'est vrai et F si c'est faux

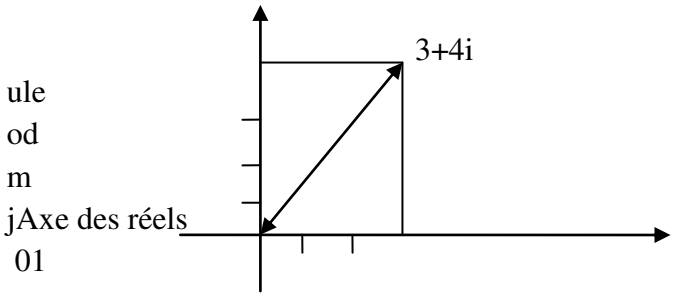
2.3 Module et argument

Le module est une grandeur réelle positive (comme la longueur), et L'argument d'un nombre complexe est un angle.

2.3.1 Module d'un nombre complexe

Soit la figure si dessous dans la double flèche est le module du nombre complexe 3+4i.

Figure 7 : le plan complexe



Module d'un nombre complexe

$= \sqrt{(\textbf{partie réelle})^2 + (\textbf{partie imaginaire})^2}$

Le module est une grandeur réelle positive (comme la longueur)est notée $|z|$

2.3.2 Opérations sur les modules

$|z \times z'| = |z| \times |z'|$

$|z / z'| = |z| / |z'|$ avec z'≠0

$|1 / z| = 1 / |z|$ z≠0

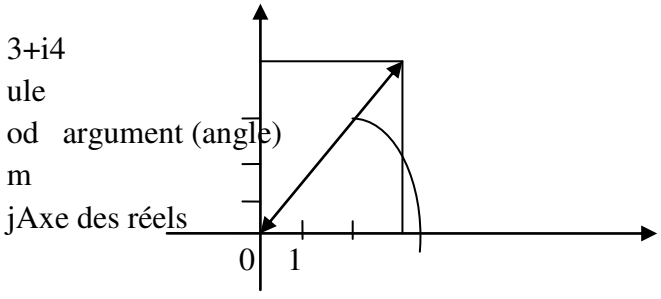
$|-z| = |z|$

$\overline{|z|} = |z|$

2.3.3 L'argument d'un nombre complexe non nul

Soit la figure si dessous dans la double flèche est le module du nombre complexe, et l'angle est l'argument de son nombre.

Figure 8 : le plan complexe



L'argument d'un nombre complexe est un angle.

Un argument de z. On note : arg z = θ [2π].

Avec Re z = z cos (arg z) et Im z = z sin (arg z)

Soit z = x + i y.
En désignant par θ un argument de z il vient : $\begin{cases} \cos\theta = Rez/|z| \\ \sin\theta = Imz/|z| \end{cases}$

Le réel θ étant une solution de ce système, on conclut que arg(z) = θ [2π].

2.3.4 Argument d'un réel non nul, d'un imaginaire pur

• Le complexe z est un réel strictement positif si et seulement si arg(z) = 0 [2π].
• Le complexe z est un réel strictement négatif si et seulement si arg(z) = π [2π].
• Le complexe z est un imaginaire pur si et seulement si arg z = π/2[π]

L'argument du nombre complexe z se note : arg(z) = arg(3+ 4i)
Dans le cas particulier où la partie réelle est strictement positive :
arg z = $\tan^{-1}$ (partie imaginaire/partie réelle)

Application numérique (avec une calculatrice) :
arg(3+4i)=arc tan (4/3) = +53,13^0
-Suivant la marque de la calculatrice, la fonction réciproque de la tangente se note :

arc tanou **Shift + tan** ou **tan-1** ou **Atn**

-Dans le cas particulier où la partie réelle est positive et la partie imaginaire nulle
(Nombre réel positif), l'argument est nul. : arg(8) = 0°
-Dans le cas particulier où la partie réelle est négative et la partie imaginaire nulle
(nombre réel négatif), l'argument est 180° (ou π radians) : arg(- 8) = 180°
-Dans le cas particulier où la partie réelle est nulle et la partie imaginaire positive,
l'argument est. + 90° (ou π/2 radian) : arg(+2i) = +90°
-Dans le cas particulier où la partie réelle est nulle et la partie imaginaire négative,
l'argument est. – 90° (ou– π/2 radians): arg(-3i) = - 90°
-Dans le cas particulier où la partie réelle est strictement négative :
En degrés :
arg Z =180^0+ $\tan^{-1}$(partie imaginaire /partie réelle)
En radians :
arg Z =π+$\tan^{-1}$(partie imaginaire /partie réelle)

2.3.5Opérations sur les arguments

Pour tous complexes z et z' non nuls et pour n entier relatif

$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$

$\arg(z^n) = n \arg(z) [2\pi]$

$\arg(1/z) = -\arg(z) [2\pi]$

$\arg(z/z') = \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$

$\arg(\bar{z}) = -\arg(z) [2\pi]$

$\arg(-z) = \pi - \arg(z) [2\pi]$

2.3.6Exercice

L'impédance complexe de l'association de $Z_R = R$; $Z_L = j L\omega$ en parallèle est alors : $Z = j R L\omega / R + jL\omega$,Le module et l'argument sont :

$|Z| = \frac{RLW}{\sqrt{R^{2+}(Lw)^2}}$ et $\text{Arg}(Z) = \pi/2 - \text{arctang}(Lw/R)$ **V** **F**

Encercler V si c'est vrai et F si c'est faux

2.4Les différentes écritures d'un nombre complexe non nul

Les différentes écritures d'un nombre complexe ont pour but de faciliter la résolution des équations soit en électronique ou bien en électricité exemple ils sont utiles pour les intégrales en forme cosinus ou sinus**.**

2.4.1Formes trigonométriques

L'égalité $z = r \times (\cos\theta + i \sin\theta)$ est une forme trigonométrique du nombre complexe non nul z,

Avec : $r = |z|$ et $\theta = \arg z [2\pi]$.

2.4.2Nombre complexe de module 1 (nombre complexe unitaire)

Tout nombre complexe de module 1 a pour forme trigonométrique $\cos\theta + i \sin\theta$

Oùθest un de ses arguments.

On convient de désigner le nombre complexe unitaire $\cos\theta + i \sin\theta$ par la notation $e^{i\theta}$

(On lit : Expo puissance iθ).

Cette nouvelle notation conduit aux formules ci-dessous, avec θ et θ' réels et n entier relatif :

$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta + \theta')}$

$e^{i\theta} / e^{i\theta'} = e^{i(\theta - \theta')}$

$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

$\overline{(e^{i\theta})} = e^{-i\theta}$

2.4.3Formes exponentielles

L'égalité $z = r \times e^{i\theta}$ est une forme exponentielle du nombre complexe non nul z,

Avec : r= |z| et θ = arg z [2π].

2.4.4Formules de Moivre et Euler

Formules de Moivre :
Pour tout réel θ et tout entier relatif n :
$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$
$(\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta)$
Formules d'Euler :
Pour tout réel θ :
$\cos\theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) / 2$ et $\sin\theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) / 2i$

2.4.5Exercice

la forme algébrique du complexe $(1 + i\sqrt{3})^{20} = [2^{20}, 20\pi/3]$ V F
Pour déterminer la forme $(1 + i\sqrt{3})^{20}$; il est préférable d'utiliser les formes exponentielles plutôt d'effectuer des multiplications successives…

Encercler V si c'est vrai et F si c'est faux

2.5 Equation du second degré dans C à coefficients réels

D'Alembert est le premier à avoir énoncé, sous une forme complète, le théorème fondamental de l'algèbre, souvent nommé simplement de d'Alembert, déjà avancé par Viète et Girard mais qu'ils n'arrivèrent pas à démontrer de façon précise :
Tout polynôme d'une variable complexe, de degré *n*, admet *n* racines complexes (éventuellement égales).

2.5.1Racines carrées dans C

Soit *a* un nombre réel.
Il admet dans C deux racines carrées :
• Si *a* est positif, ses racines carrées complexes sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ (elles sont confondues pour $a = 0$).
• Si *a* est strictement négatif, ses racines carrées complexes sont $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.

2.5.2Equation du second degré

On considère une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$
Avec a réel non nul, b et c réels.

Le discriminant de l'équation est le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

• Lorsque $\Delta = 0$ alors l'équation admet pour unique solution le réel $-b/2a$

• Lorsque $\Delta \neq 0$ alors l'équation admet exactement deux solutions :

- si $\Delta > 0$ alors ces deux solutions sont les réels :

$-b - \sqrt{\Delta}/2a$ et $-b + \sqrt{\Delta}/2a$

- si $\Delta < 0$ alors ces deux solutions sont les complexes conjugués :

$-b - i\sqrt{\Delta}/2a$ et $-b + i\sqrt{\Delta}/2a$

2.5.3 Exercice

Les racines de l'équation $x^2 + x + 2 = 0$

La réponse correspond à :

A.	B.	C.
$X1=-(-1-i\sqrt{7})/2$	$X1=-1-i7/2$	$X1=-1+i7/2$
$X2=(-1+i\sqrt{7})/2$	$X2=-1-i7/2$	$X2=-1+i7/2$

2.6Résumé

En électricité, on peut caractériser le comportement d'un dipôle passif linéaire en régime sinusoïdal avec un nombre complexe que l'on appelle « impédance complexe ».

Ainsi l'impédance complexe d'une résistance est : $Z_R = R$ (R est la résistance en ohms). « La partie réelle »

L'impédance complexe d'une bobine est : $Z_L = j L\omega$ (L est l'inductance en henry, et ω la pulsation du courant en rad/s), « La partie imaginaire ».

L'impédance complexe d'un condensateur est : $Z_C = 1/j C \omega = -j/C\omega$ (C est la capacité en farad, et ω la pulsation du courant en rad/s), « la partie imaginaire ».

La forme algébrique d'un circuit obtenu par exemple en associant une résistance avec une bobine pure.

Le nombre complexe conjugué sert comme solution à utiliser quand on veut déterminer la partie réelle et la partie imaginaire d'un rapport. C'est une méthode pratique et astucieuse pour simplifier le calcul.

En électronique, on peut caractériser le comportement d'un filtre avec un nombre complexe que l'on appelle « Fonction de transfert ».

L'amplification du filtre correspond au **module** de la fonction de transfert.

Le déphasage entre la sortie et l'entrée est fourni par **l'argument** de la fonction de transfert.

En électricité on caractérise l'impédance de l'association (en ohms) correspond au module, et le déphasage entre tension et courant est donné par l'argument de l'impédance complexe.
Pour résoudre n'importe quel problème en électronique ou électricité, il faut connaître les différentes écritures d'un nombre complexe.
Laformule de Moivre sert d'outil essentiel pour simplifier les calculs, au lieu d'utiliser des produits successifs, la formule d'Euler sert à la linéarisation polynôme trigonométrique et la simplification, par exemple, en intégrale.

2.7Exercice de synthèse

Spécialité : Electrotechnique
Module : Appliquer des notions de mathématiques liées au domaine de l'électrotechnique

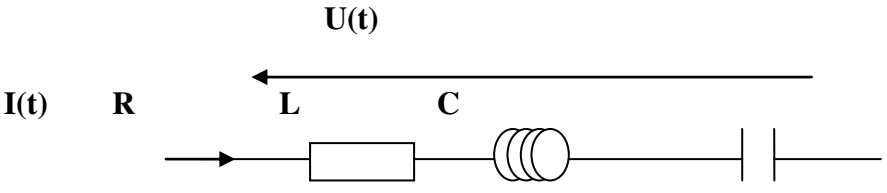
Durée : 30 mn
But :c'est de familiariser les stagiaires à appliquer les nombres complexes dans les circuits à courant alternatif.

Matériel requis :

- Calculatrice
- Documents appropriés

Mise en situation :

Soit le circuit électrique composé de résistance, inductance et capacité en série sous tension U(t).



Marche à suivre :

- Déterminer l'impédance complexe Z du circuit.
- En déduire la partie réelle du circuit.
- En déduire la réactance X du circuit.
- En déduire le module et l'argument.

CHAPITRE 3

LES MATRICES ET DETERMINANT

Les matrices sont un outil mathématique bien présent en électrotechnique. On les utilise en électricité (loi de Kirchhoff) ,dans la commande des machines électriques (transformation de Park) et en électronique…

3.1 Définitions

Une matrice n × m est un tableau de nombres à n lignes et m colonnes :

Exemple avec :
n = 2, m = 3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

n et **m** sont les ***dimensions*** de la matrice.

Une matrice est symbolisée par une lettre en caractères gras, par exemple **A.**

On note A_{ij} l'élément situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j (la ligne est toujours nommée en premier).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix}$$

On note $[A_{ij}]$ la matrice d'élément général A_{ij}. On a donc : $\mathbf{A} = [A_{ij}]$

Si m = 1, la matrice est appelée ***vecteur***(plus précisément ***vecteur-colonne***) :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Remarque : Dans ce chapitre, nous utiliserons des lettres majuscules pour les matrices et des lettres minuscules pour les vecteurs, mais ce n'est pas obligatoire.

3.1.1matrice carrée

Si n = m, la matrice est appelée ***matrice carrée***.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1/2} & \mathbf{2}\end{bmatrix}$$

3.1.2 Matrice diagonale

C'est une matrice carrée dans la ***diagonale*** contient des éléments non nuls, et les autres éléments sont nuls.

$$\mathrm{D}=\begin{matrix}D11 & 0 & 0\\ 0 & D22 & 0\\ 0 & 0 & D33\end{matrix}$$

3.1.3 Matrice unité

C'est une matrice carrée dont la diagonale contient des 1, et les autres éléments sont nuls, elle est notée **In**

$$\mathrm{A}=\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}$$

3.1.4 Matrice triangulaire supérieure

Uij=0 si i> j

Uij≠ 0 si i≤ j $\mathrm{A}=\begin{matrix}A11 & A12 & A13\\ 0 & A22 & A23\\ 0 & 0 & A33\end{matrix}$

3.1.5 Matrice triangulaire inferieure

Lij=0 si i< j $\mathrm{A}=\begin{matrix}A11 & 0 & 0\\ A21 & A22 & 0\\ A31 & A32 & A33\end{matrix}$

Lij≠ 0 si i≥ j

3.1.6 Matrice symétrique

Une matrice carrée **A** est dite *symétrique* si : $A_{ji} = A_{ij} i\neq j$

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 0\\ -1 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

3.1.7 Exercice

Soit la matrice $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1/2 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Associez chacune des réponses à sa question :

l'ordre de A	$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
la matrice symétrique de A	A_3
la matrice diagonale de A	$A=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$
la matrice triangulaire inferieure de A	$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

3.2Opérations sur les matrices

3.2.1 Addition, soustraction

L'addition et la soustraction des matrices se font terme à terme. Les matrices doivent avoir les mêmes dimensions :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

3.2.2 Multiplication par un nombre

Chaque terme de la matrice est multiplié par le nombre :

$$2\times\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 8 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

3.2.3 Transposition

La transposée $\mathbf{A}^T$ (aussi notée $\mathbf{A}'$) d'une matrice **A** est la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de **A** :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La transposée d'un vecteur-colonne est un vecteur-ligne :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

3.2.4 Multiplication des matrices

Définissons tout d'abord le produit d'un vecteur-ligne $\mathbf{x}^T$ par un vecteur-colonne **y** :

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

Ce produit est appelé ***produit scalaire*** des vecteurs **x** et **y**, noté **x** · **y**. Les vecteurs doivent avoir la même dimension.

Le produit matriciel: le produit de la matrice **A** (n × **m**) par la matrice **B** (**m** × p) est la matrice **C** (n × p) telle que l'élément $\mathbf{C_{ij}}$ est égal au produit scalaire de la ligne i de la matrice **A** par la colonne j de la matrice **B**.

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik}B_{kj} \qquad i = 1..n \qquad j = 1..p$$

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 23 & 9 \end{bmatrix}$$

On a en effet, en effectuant les produits ligne par colonne :

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\2\\3\end{bmatrix}=1\times5+2\times2+0\times3=9 \qquad \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}=1\times1+2\times3+0\times4=7$$

$$\begin{bmatrix}4 & 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\2\\3\end{bmatrix}=4\times5+3\times2-1\times3=23 \qquad \begin{bmatrix}4 & 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}=4\times1+3\times3-1\times4=9$$

Le produit matriciel est :

Associatif : $\mathbf{ABC} = (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$

Distributif par rapport à l'addition : $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$

Non commutatif : **AB** n'est pas égal à **BA** en général.

La matrice unité **I** est élément neutre pour la multiplication : $\mathbf{AI}_m = \mathbf{I}_n\mathbf{A} = \mathbf{A}$,

Si la matrice **A** est de dimensions n × m.

Transposée d'un produit : $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ (Attention au changement d'ordre !).

3.2.5 Inversion des matrices carrées

Une matrice carrée **A** est dite *inversible* ou *régulière* s'il existe une matrice carrée $\mathbf{A}^{-1}$ (appelée ***matrice inverse***) telle que :

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

Si $\mathbf{A}^{-1}$ n'existe pas, la matrice **A** est dite ***singulière***

$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$

$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$

$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ (Attention au changement d'ordre !)

$[\text{diag}(D_{ii})]^{-1} = \text{diag}(1/D_{ii})$

La matrice **A** est dite ***orthogonale*** si $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$

3.2.6Déterminant d'une matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2

Pour une matrice 2 × 2, on montre que la matrice inverse est donnée par :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Le nombre ***ad – bc*** est appelé ***déterminant*** de la matrice **A**, noté :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| = \det(\mathbf{A})$$

La matrice inverse $\mathbf{A}^{-1}$ n'existe donc que si ***det A*** *est différent de zéro*.

La matrice **A** est singulière si **det A = 0**, régulière dans le cas contraire.

Ce résultat se généralise à une matrice de dimension quelconque.

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3

Pour une matrice 3x3 on affecte a la première colonne le signe + et la deuxième colonne le signe – et la troisième colonne le signe + et on fait le développement par ligne

+ - +

$$A = \begin{bmatrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ a3 & b3 & c3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Det(A) = +a1}\begin{bmatrix} b2 & c2 \\ b3 & c3 \end{bmatrix}\mathbf{- b1}\begin{bmatrix} a2 & c2 \\ a3 & c3 \end{bmatrix}\mathbf{+c1}\begin{bmatrix} a2 & b2 \\ a3 & b3 \end{bmatrix}$$

=+a1 (b2c3-b3c3)-b1 (a2c3-a3c2) +c1 (a2b3-a3b2)

Remarque:

$\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$

$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \times \det(\mathbf{B})$

Le déterminant d'une matrice triangulaire ou diagonale est égal au produit des éléments diagonaux. En particulier, $\det(\mathbf{I}) = 1$ (si **I** est la matrice unité)

Si **A** est régulière, $\det(\mathbf{A}^{-1}) = 1 / \det(\mathbf{A})$
puisque $\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A}) \times \det(\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{I}) = 1$

Si **A** est orthogonale, $\det(\mathbf{A}) = \pm 1$
puisque $\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^{T}) = [\det(\mathbf{A})]^2 = \det(\mathbf{I}) = 1$

3.2.7 Calcul de la matrice inverse

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n et Δ_{ij} le cofacteur de l'élément a_{ij}.

- On appelle **Co matrice** (ou **matrice adjointe**) de A, la matrice carrée d'ordre n,

Notée **com (A)** (ou a**dj A**) définie par :

Où Δ_{ij} est le cofacteur de l'élément a_{ij} de A défini à partir du mineur $|\mathbf{M_{ij}}|$ par la relation :

$$\mathbf{\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|.}$$

- On appelle **matrice inverse** de la matrice carrée A d'ordre n, la matrice, si elle existe, notée A^{-1} telle que :

$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I$ obtenue par la relation suivante :

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{\mathbf{{}^t com(A)}}{|A|} \qquad (|A| \neq 0)$$

Où ${}^t com(A)$ est la transposée de la Co matrice de A.

- Si A et B sont deux matrices carrées inversibles et du même ordre, alors :

$$\mathbf{(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}}$$

Exemple :

Soit la matrice B ,calculons sa matrice inverse

$$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\-1&-4&-1\end{pmatrix} \quad =\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&2\\-1&-4&-1\end{vmatrix}=$$

$$com(B)=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1&2\\-4&-1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&2\\-1&-1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0&1\\-1&-4\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2&3\\-4&-1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&3\\-1&-1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&2\\-1&-4\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&3\\0&2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-2&1\\-10&2&2\\1&-2&1\end{pmatrix}$$

$${}^{t}com(B)=\begin{pmatrix}7&-10&1\\-2&2&-2\\1&2&1\end{pmatrix}$$

D'où det(B) = 6 $B^{-1}=$ $\dfrac{{}^{t}com(B)=\begin{pmatrix}7&-10&1\\-2&2&-2\\1&2&1\end{pmatrix}}{6}$

3.2.8Exercice

Soit la matrice $A=\begin{bmatrix}3&1&0\\2&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$

La matrice inverse de A est $A^{-1}=1\begin{bmatrix}-1&-1&0\\-2&3&0\\2&-3&1\end{bmatrix}$ **V** **F**

Encercler V si c'est vrai et F si c'est faux

3.3 Application aux systèmes d'équations linéaires

3.3.1 Formulation matricielle

Un système de n équations linéaires à n inconnues est de la forme :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n$$

Où les a_{ij} sont les coefficients du système, les x_i les inconnues et les b_i les termes constants.

Un tel système peut s'écrire sous forme matricielle : **Ax = b** tel que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

3.3.2 Cas d'une matrice régulière

Soit le produit matriciel **A x = b**

Si la matrice **A** est régulière, on a, en multipliant à gauche par $\mathbf{A}^{-1}$les deux cotés de l'égalité:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Soit : $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$

Soit le système de 2 équations à 2 inconnues :

$$2x_1 + 3x_2 = 9$$
$$x_1 - x_2 = 2$$

On a successivement :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{9} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = 2 \times (-1) - 3 \times 1 = -5$$

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -15 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Soit : $x_1 = 3$, $x_2 = 1$.

3.3.3 Exercice

Soit le système de trois équations a trois inconnues suivant : x1+x2-x3=1
-x1+x2+x3=2
x1-x2+x3=3

Les inconnues x1,x2, x3 sont égales a : x1=2 ; x2=3/2 ; x3=5/2 **V** **F**

Encercler V si c'est vrai et F si c'est faux

3.4 Résumé

La matrice est un tableau composé de lignes et de colonnes, elle peut être un vecteur ou une ligne.

Pour la résolution de n'importe quel système d'équations de la forme **Ax = b ,** **o**n a besoin des connaissances suivantes :

- Calculer le déterminant.
- Mettre le système sous forme $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.
- Déterminer la matrice inverse $\mathbf{A}^{-1}$
- Faire le produit des deux matrices.

3.5Exercice de synthèse

Spécialité : Electrotechnique

Module : Appliquer des notions de mathématiques liées au domaine de l'électrotechnique

Durée :1 H 30 mn

But :c'est de familiariser les stagiaires à la résolution des matrices dans les circuits en appliquant la loi de Kirchhoff.

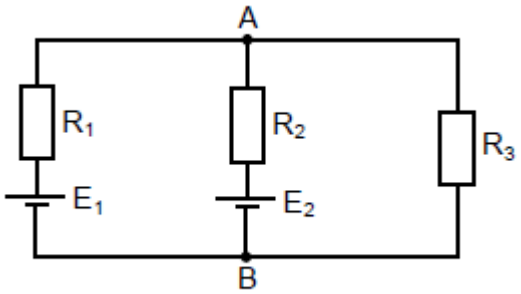
Matériel requis :

- Calculatrice
- Document approprié

Mise en situation :

Application des lois de Kirchhoff

Soit le circuit de la figure suivante,
Sachant que : $R_1 = 2\ \Omega$; $R_2 = 5\ \Omega$; $R_3 = 10\ \Omega$;
$E_1 = 20$ V ; $E_2 = 70$ V



Marche à suivre :

1. Déterminer les intensités de courants dans les trois branches.
   En appliquant pour ce circuit les relations matricielles que vous avez apprises.

CHAPITRE 4

LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Une équation différentielle d'ordre **n** est une équation reliant une fonction y (n fois dérivable) à ses n premières dérivées.

4.1Equations différentielles du premier ordre

Si l'on se place dans un circuit série RL soumis à une tension e (t), alors l'intensité i(t) induite par cette différence de potentiel vérifie l'équation :

$$\mathbf{L}\frac{\boldsymbol{di(t)}}{\boldsymbol{dt}} \mathbf{+ Ri(t) = e(t)}$$

Si le signal e est dérivable, on peut dériver cette équation, et l'on obtient l'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants, ce qu'on va apprendre.

4.1.1 Définition

Une équation différentielle est une équation liant une fonction inconnue et certaines de ses dérivées. L'usage est de noter cette fonction ***y*** ou ***f*** ou ***g.*** en fonction de ***x*** ou de ***t***

On s'intéresse aux équations du type : **a·f '(t) + f(t) = g(t)**

Avec :

- *f(t)* une fonction d'une variable réelle t
- ***f ' (t) =df/dt*** la dérivée de la fonction f par rapport à la variable t
- **g(t)** une fonction d'une variable réelle t
- ***a*** une constante réelle (a≠ 0)

On appelle solution d'une équation différentielle (*E*) un couple (f, *I*) où f est une fonction et *I* un intervalle tels que f vérifie (*E*) sur *I*.

Résoudre une équation différentielle sur un intervalle *I*, c'est trouver toutes les fonctions solutions sur *I*. (Ce n'est pas toujours évident).

À notre niveau, on aura presque toujours *I* = IR.

4.1.2Résolution de l'équation homogène

L'équation homogène associée: **a·f '(t) + f(t) = 0**

a et g(t) étant données, le problème est de trouver la ou les fonctions f(t) qui vérifient l'équation différentielle.

La résolution se fait en deux parties :

Recherche de la ***solution de l'équation homogène associée*** :

a·f '(t) + f(t) = 0(C'est l'équation sans second membre)

En mathématique, on montre que la solution de l'équation

a·f '(t) + f(t) = 0est : $\mathbf{f(t)= C\ e^{-t/a}}$

Avec C une constante qui dépend des conditions initiales.

a.f'(t)+f(t)=0
a.f'(t)=-f(t)
f'(t)/f(t)=-1/a
$\int f'(t)/f(t)dt=\int \frac{-1}{a} dt$
Ln(f(t)) +K= - t/a +K'
Ln f(t)= - t/a +K'-K posons K'-K=constante
f(t)= $e^{-t/a}$ +Constante
$f(t)_{homogène}= C\ e^{-t/a}$

4.1.3Résolution de l'équation particulière

Recherche d'une ***solution particulière*** de l'équation générale : **a·f '(t) + f(t) = g(t)**
(C'est l'équation avec second membre)
f(t) particulière = g(t)

4.1.4 Résolution de l'équation générale

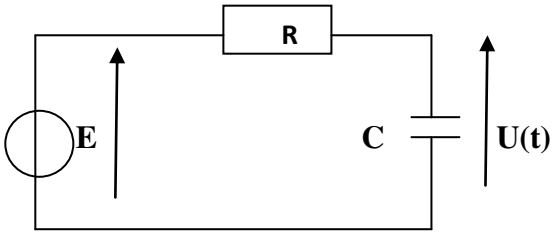
La solution générale est la somme de la solution de l'équation homogène associée et de la solution particulière.

a·f '(t) + f(t) = g(t)
f(t)= g(t)-a f'(t)
f(t)= g(t)-a (c $e^{-t/a)}$,
f(t)= g(t)-a (-c/a $e^{-t/a}$)
f(t)= g(t) + c $e^{-t/a}$
$f(t)_{générale}= c\ e^{-t/a}{}_{homogène}+ g(t)_{particulière}$

4.1.5 Résolution à partir d'un circuit électrique RC

U(t) est la tension électrique aux bornes d'un condensateur C alimenté à travers une résistance R sous une tension constante E :

Figure 9 : circuit électrique RC



Les lois de l'Electricité indiquent que : **RC du(t)/dt+u(t) = E**

Cherchons maintenant la loi d'évolution de la tension électrique U(t)
Recherche de la solution de l'équation homogène associée :**RC du(t)/dt+ u(t) = 0**

$$\mathbf{U(t)\ homogène = k.\ e^{-t/RC}}$$

Avec K une constante qui dépend des conditions initiales.

Recherche de la solution particulière de l'équation générale :**RC du(t)/dt+u(t) = E**

$$\mathbf{U(t)_{particulière} = E}$$

- Solution générale : $\mathbf{u(t) = u(t)_{homogène} + u(t)_{particulière} = k.\ e^{-t/RC} + E}$

En prenant comme condition initiale u(t = 0) = 0 V (condensateur déchargé)
Alors : k = - E

$$\mathbf{U(t)=E\ (1-\ e^{-t\ /RC})}$$

4.1.6 Exercice

Résoudre l'équation y'-3y= 0 avec y(1)=4 comme condition initiale

Sa résolution correspond à:

A. F(x)= $8e^{3(x-1)}$
B. F(x)= $2e^{2(x-1)}$
C. F(x)= $4e^{3(x-1)}$

4.2Equations différentielles du second ordre

Si l'on se place dans un circuit série RLC soumis à une tension e (t), alors l'intensité i(t) induite par cette différence de potentiel vérifie l'équation :

$$\mathbf{L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + 1/C\int i(t)dt = e(t)}$$

Si le signal e est dérivable, on peut dériver cette équation, et l'on obtient l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, ce qu'on va apprendre.

4.2.1 Définition

Soit *I* un intervalle.
1. Soient f1 et f2 deux solutions sur *I* de l'équation différentielle (E). Alors les fonctions de la forme *A*f1 + *B*f2sont également des solutions sur *I* de (E).

2. Si f1 et f2 sont des solutions sur *I* non nulles sur *I* et non liées(1) sur *I*, alors les solutions sur *I* de l'équation différentielle (E) sont toutes de la forme *A*f1 + *B*f2.

On s'intéresse aux équations du type : **a·f ''(t) + b·f '(t) + c·f(t) = g(t)**

Avec :

f(t) une fonction d'une variable réelle t

f ' (t) =df/dt la dérivée de la fonction f par rapport à la variable t

f '' (t) =df^2/dt^2 la dérivée deuxième de la fonction f par rapport à la variable t

g(t)une fonction d'une variable réelle t

a une constante réelle (a≠ 0)

4.2.2Résolution de l'équation homogène

Comme précédemment, la solution générale est la somme de la solution de l'équation sans second membre et de la solution particulière.

Recherche de la solution de l'équation homogène associée :

a·f ''(t) + b·f '(t) + c·f(t) = 0

On définit ***l'équation caractéristique*** :

$a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$ **avec f'(t) = r**

Dont il faut chercher les racines de l'équation du deuxième degré.

Trois possibilités se présentent suivant la valeur du discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$

$-\Delta > 0$: deux racines réelles distinctes r_1 et r_2.

La solution est alors : $\mathbf{f(t)_{homogène} = A.e^{r1.t} + B.e^{r2.t}}$

Avec : $\begin{cases} r1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\,a} \\ r2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\,a} \end{cases}$

$-\Delta = 0$: une racine double réelle r .

La solution est alors : $\mathbf{f(t)_{homogène} = (A.t + B).e^{r.t}}$

Avec : $r = \frac{-b}{2.a}$

$-\Delta < 0$: deux racines complexes conjuguées : $\mathbf{r = \alpha \pm \beta j}$

La solution est alors : $\mathbf{f(t)_{homogène} = e^{\alpha t}}.[A.cos(\beta.t) + B.sin(\beta.t)]$

Avec : $\begin{cases} \alpha = \frac{-b}{2\,a} \\ \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2\,a} \end{cases}$

A et B sont deux constantes réelles qui dépendent des conditions initiales.

4.2.3 Résolution de l'équation particulière

Recherche d'une ***solution particulière*** de l'équation générale :

a·f ''(t) + b. f'(t) + c.f(t) = g(t) (C'est l'équation avec second membre)

f(t) particulière = g(t)

4.2.4Résolution de l'équation générale

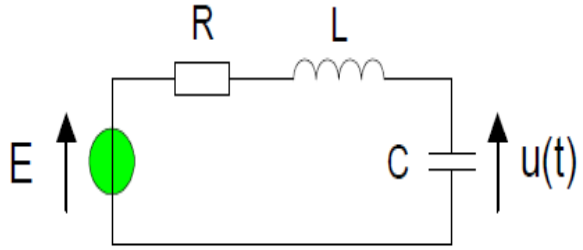
La solution générale est la somme de la solution de l'équation homogène associée et de la solution particulière.

$F(t)_{générale}$ = $f(t)_{homogène}$ + f(t) particulière

4.2.5 Résolution à partir d'un circuit électrique RLC

u(t) est la tension électrique aux bornes d'un condensateur C = 100 nF
Alimenté à travers une
Résistance R = 100 Ω et une bobine d'inductance L = 100 mH par une source de tension constante E = 10 V :

Figure 10: circuit électrique RLC



Les lois de l'Electricité donnent : **$LC\, d^2u(t) / dt^2 + RC\, du(t) / dt + u(t) = E$**
On suppose le condensateur initialement déchargé et le courant nul :
u(t=0) = 0

du(t=0)/dt = 0

a·f ''(t) + b·f '(t) + c·f(t) = g(t)

$a = LC = 10^{-8}$

$b = RC = 10^{-5}$

c = 1

g(t) = E

L'équation caractéristique : $a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$ avec f'(t) = r

L'équation du discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = -3.99.10^{-8}$

$\Delta < 0$Nous avons deux racines complexes conjuguées

$f(t)_{homogène} = e^{-0,5\ 10^3 t}\left[A.\cos(\frac{\sqrt{3.99.10^{-8}}}{2.10^{-8}}).t + B.sin\ (\frac{\sqrt{3.99.10^{-8}}}{2.10^{-8}}).t\right]$

$f(t)_{générale} = f(t)_{homogène} + f(t)$ particulière

$f(t)_{générale} = f(t)_{homogène} + E$

A t = 0 u(t=0)=0

u'(t=0)=0

En remplaçant t par zéro on déterminera les valeurs de A et B

$$\begin{cases} A + E = 0 \\ \alpha A + \beta B = 0 \end{cases} => \begin{cases} A = -E = -10 \\ B = +10.\frac{\alpha}{\beta} = -0.5 \end{cases}$$

$f(t)_{générale} =$

$$e^{-0,5\ 10^3 t}\left[-10.\cos(\frac{\sqrt{3.99.10^{-8}}}{2.10^{-8}}).t - 0.5.sin\ (\frac{\sqrt{3.99.10^{-8}}}{2.10^{-8}}).t\right] + 10$$

4.2.6 Exercice

Déterminer la solution de l'équation différentielle donnée qui vérifie les conditions indiquées :**Y''+1/2y'+y=0 , y(0)=1, y'(0) = 0**

La réponse correspond a :

A. $F(x) = 2e^{-1/4x}(\cos\frac{\sqrt{15}}{4}x + \frac{1}{4\sqrt{15}}\sin\frac{\sqrt{15}}{4}x)$

B. $F(x) = e^{-1/2x}(\cos\frac{\sqrt{15}}{2}x + \frac{1}{4\sqrt{15}}\sin\frac{\sqrt{15}}{4}x)$

C. $F(x) = e^{-1/4x}(\cos\frac{\sqrt{15}}{4}x + \frac{1}{4\sqrt{15}}\sin\frac{\sqrt{15}}{4}x)$

4.3Résumé

Pour un système du premier ordre il faut connaitre les points suivants :

U(t) homogène= c $e^{-t/a}$équation sans second membre avec C constante

$\mathbf{f(t)_{générale} = c\ e^{-t/a}_{homogène} + g(t)_{particulière}}$

Pour un système du second ordre sans second membre il faut connaitre les points suivants :

$-\Delta > 0$ $\mathbf{f(t)_{homogène} = A.e^{r1.t} + B.e^{r2.t}}$ ou r1 et r2 sont les deux solutions

$-\Delta = 0$ $\mathbf{f(t)_{homogène} = (A.t + B).\ e^{r.t}}$ ou r est la solution double

$-\Delta < 0$ $\mathbf{f(t)_{homogène} = e^{\alpha t}}.[\boldsymbol{A.cos(\beta.t)} + \boldsymbol{B.sin(\beta.t)}]$Ou α et β sont les parties réelle et imaginaire des solutions

4.4 Exercice de synthèse

Spécialité : Electrotechnique

Module : Appliquer des notions de mathématiques liées au domaine de l'électrotechnique

Durée : 1 h 30 mn

But : c'est de familiariser les stagiaires à la résolution des équations différentielles dans les circuits à courant alternatif.

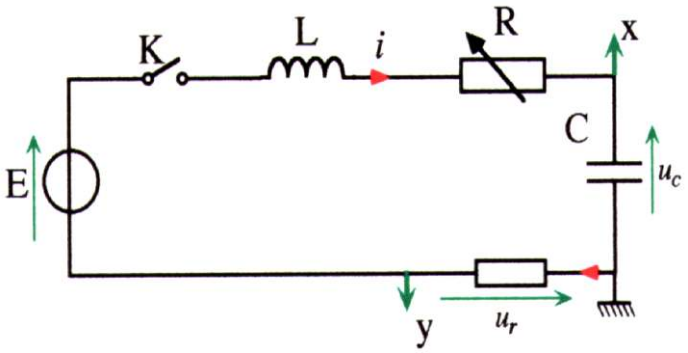
Matériel requis :

- Calculatrice
- Document approprié

Mise en situation :

La Charge d'un condensateur à travers un circuit inductif (voir figure si dessous).
A l'instant t=0 on ferme l'interrupteur K.

R = potentiomètre de10 kΩ
L = 1H
C = 0,68µF
E = 4 V
r = 1 Ω pour visualiser le courant i



Marche à suivre :

- Déterminer l'équation différentielle du circuit.

CHAPITRE 5

SERIES DE FOURIER

Joseph Fourier (1768-1830), étudia à l'Ecole Royale Militaire d'Auxerre et, Il eut, à l'Ecole Normale Supérieure, Lagrange et Laplace comme professeurs, étudia la théorie de la propagation de la chaleur, ce qui le mena à la décomposition des fonctions périodiques (série de Fourier).Les séries de Fourier et les transformées de Fourier sont deux outils mathématiques indispensables en électronique et en traitement du signal grâce à elle, on peut obtenir les spectres d'amplitude et de phase des signaux temporels.

5.1Série de Fourier

Un des principaux intérêts des séries de Fourier, est de permettre de reconstituer un signal périodique de période T (et de fréquence f) à l'aide d'une somme infinie de signaux sinusoïdaux de période T/k (de fréquence kf)

k variant de 1 à l'infini, d'une constante continue

5.1.1 Définition

Soit f une fonction périodique, de période T ,on va démontrer dans la suite du cours que f(t) peut s'écrire sous les formes :

Première forme: f(t) série de Fourier de f, la série trigonométrique associé à f

$$\mathbf{f(t) = } \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

$$\mathbf{f(t) = } a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \quad \text{avec } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$= a0 + a1 \cos(\omega t) + b1 \sin[\omega t) + a2 \cos(2\omega t) + b2 \sin(2\omega t) + \ldots\ldots$$

deuxième forme : forme harmonique de rang n (spectre de f(t))

$$\mathbf{f(t) = } a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n \cos(n\omega t + \varphi n))$$

avec : $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ $\text{ettang}(\varphi n) = \frac{b_n}{a_n}$

Un signal sinusoïdal *u(t)* peut être représenté par un trait de hauteur (ordonnée) son amplitude et d'abscisse sa fréquence *f* ou sa pulsationω.

5.1.2 Convergence d'une série Fourier

Lorsque la serie de fourier est convergente , pour tout t , sa somme est une fonction f(t) periodique de periode T=$\frac{2\pi}{\omega}$

Et on peut écrire $\mathbf{f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))}$

5.1.3 Coefficients de Fourier d'une fonction périodique

Soit une fonction f(t) périodique de période T, et intégrale sur l'intervalle T, f(t) peut être développée sous la forme d'une somme infinie de signaux sinusoïdaux.

On définit, pour n dans N^*, des nombres réels (appelés coefficients de Fourier réels) par **an** et **bn**

Tel que :$\mathbf{f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))}$

a_1, b1, a2, b2,...., an, bn,...sont les coefficients de Fourier de f(t)

5.1.3.1 calcul des an

On va calculer pour toutes les valeurs de **k** l'integrale : $\int_0^T f(t).\cos(k\omega t)\,dt$

K=0

$\int_0^T f(t).dt = \int_0^T (a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))).dt$

D'ou on déduit :$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t).dt$

On remarque que $a_0$est la valeur moyenne de f(t)

K≠ 0

$\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)dt =$

$$\int_0^T (a_0 \cos(k\omega t) + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos(n\omega t)\cos(k\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\cos(k\omega t))).dt$$

$$=\int_0^T (a_0 \cos(k\omega t) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \frac{\cos((n-k)\omega t)+\cos((n+k)\omega t)}{2} + bn \sin(n\omega t)\right) \cos(k\omega t))).dt$$

$$= \int_0^T \frac{ak}{2}_0 dt = \frac{ak}{2} T$$

D'ou on déduit : $ak = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)dt$

5.1.3.2 calcul des bn

On va calculer pour toutes les valeurs de K≠ 0 l'integrale :
$\int_0^T f(t).\sin(k\omega t)\, dt$

K≠ 0

$$\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)dt =$$

$$\int_0^T (a_0 \sin(k\omega t) + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t)\sin(k\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\sin(k\omega t))).dt$$

$$=\int_0^T (a_0 \sin(k\omega t) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega t)\sin(k\omega t) + b_n \frac{\cos((n-k)\omega t)-\cos((n+k)\omega t)}{2}\right))dt$$

$$= \int_0^T \frac{bk}{2}_0 dt = \frac{bk}{2} T$$

D'ou on déduit : $bk = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)dt$

5.1.4 Exercice

Les coefficients de la série de Fourier de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0 \\ \pi, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

Sont

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_0^{\pi} \pi dx\right) = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \int_0^{\pi} \pi\cos(nx)dx = 0, \quad n \ge 1$$

$$b_n = \int_0^{\pi} \pi \sin(nx)dx = \frac{1}{n}(1 - \cos(n\pi)) = \frac{1}{n}(1 - (-1)^n).$$

Indiquer si la réponse est vraie ou fausse

5.2 Calcul des Coefficients de Fourier pour des fonctions paires ou impaires

On considère f : R⟶ C Continue par morceaux *T*-périodique.

Les symétries de f se retrouvent sur sa série de Fourier

5.2.1fonctions paires

f(-t)=f(t) fonction paire

si f est paire ,la fonction f(t)cos(kωt)est paire donc pour tout n≥ 1

$\mathbf{a_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(k\omega t)dt}$ pour K≠ 0 et $\boldsymbol{a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t).dt}$

La fonction f(t) sin(kωt)est impaire donc $\mathbf{b_k=0}$

5.2.2fonctions impaires

f(-t)= -f(t) fonction impaire

si f est impaire ,la fonction f(t) cos(kωt)est impaire donc pour tout n≥ 1

$\boldsymbol{bk = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(k\omega t)dt}$ pour K≠ 0

La fonction f(t) sin(kωt)est paire donc $\mathbf{a_k=0}$

Attention, les définitions des coefficients des séries de Fourier sont différentes d'un ouvrage à l'autre. Il est donc vivement recommandé d'être vigilant...

5.2.3 Exercice 15

La série de Fourier de la fonction : $f(x) = x, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$

Est **F(x)** ~**2(sin(x) -** $\frac{sin(2x)}{2} + \frac{sin(3x)}{3} + \cdots$

Indiquer si la réponse est vraie ou fausse

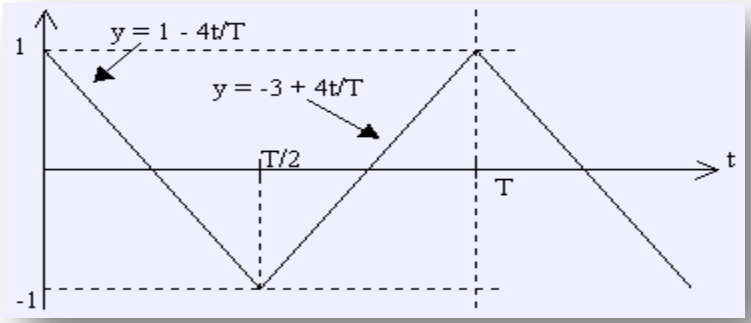
5.3Coefficients de Fourier de la fonction triangulaire

Nous allons ici déterminer les sommes de Fourier de deux signaux classiques. Ces des fonctions symétriques soit par rapport a l'axe des x 'o x ou des y'o y.

5.3.1Fonction triangulaire

La fonction triangulaire à la forme d'un triangle comme le nom l'indique voir la figure ci dessous.

Figure 11: signaux triangulaires et carrée



f(t) = 1 - 4t/T de 0 à T/2 et -3 + 4t/T de T/2 à T
f(t) étant symétrique par rapport à 0, $a_0 = 0$

$$an = 2/T\left(\int_0^{T/2}\left(1-\frac{4t}{T}\right)\cos nwtdt + \int_0^{T/2}\left(-3-\frac{4t}{T}\right)\cos nwtdt\right) = 2/T(A1+A2)$$

$$\boldsymbol{A1 = \int_0^{T/2}\left(1-\frac{4t}{T}\right)\cos nwtdt = T/n2\,\pi2\,(1\ -\ \cos n\,\pi)}$$

$$\boldsymbol{A2 = \int_0^{T/2}\left(-3-\frac{4t}{T}\right)\cos nwtdt = T/n^2\,\pi^2\,(1 - \cos n\,\pi)}$$

On rappelle que $\omega T = 2\pi$

$an = 2/T\,(A_1 + A_2) = 2/T\,(2T/n^2\,\pi^2\,(1 - \cos n\,\pi)) = 4/n^2\,\pi^2\,(1 - \cos n\,\pi)$

$an = 4/n^2\,\pi^2\,(1 - \cos n\,\pi)$

Si n est pair, $an = 4/n^2\pi^2\,(1 - \cos 2k\,\pi) = 0$

Si n est impair, $an = 4/n^2\pi^2\,(1 - \cos (2k+1)\,\pi) = 8/n^2\,\pi^2$

Donc $an = 8/n^2\,\pi^2$ si n est impair si non $an = 0$

Le même calcul pour bn donne 0 pour tout n

$$f(t) = 8/\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2 \text{Cosnwt}) \quad \textbf{avec n impair}$$

5.3.2 Fonction carrée

$$f(t) = 4/\pi \sum_{n=1}^{\infty}(\ 1/n \sin nwt) \quad \textbf{avec n impair}$$

f(t) est la primitive de -4/T f(t) donc

$$f(t) = -16/\pi \quad T \sum_{n=1}^{\infty}(-1/n^2\, w\text{Cos nwt}) \quad \textbf{avec n impair}$$

5.3.3Exercice

g est paire g(t)= 1-2t/T pour t [0 , $T/2$] , bn = 0 pour tout n $\geq$ 1

Sin k π = 0, donc A_1 = - $2/n^2\ \omega^2 T$ cos n π + $2/n^2\ \omega^2 T$**V** **F**

Encercler V si la réponse est vraie ou F si la réponse fausse

5.4 Résumé

A l'issue de cette partie de ce chapitre le stagiaire devra être capable de calculer les coefficients de Fourier, et d'en déterminer certaines sommes.
Dans la première partie de ce chapitre on a calculé les coefficients réels de Fourier, sachant que pour une fonction, soit qu'elle est paire ou impaire, on peut déterminerces coefficients :
F(t) paire a0, ak existe et bk=0
F(t) impaire ak=0, et bk existe
Dans la partie suivante on va voir quelques formes pour déterminer le développement en série de Fourier.

5.5 Exercice de synthèse

Spécialité : Electrotechnique

Module : Appliquer des notions de mathématiques liées au domaine de l'électrotechnique

Durée : 30 mn

But :c'est de familiariser les stagiaires à la résolution des séries de fourrier pour représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle.

Matériel requis :

- Calculatrice
- Document approprié

Mise en situation :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$, de période 4 telle que :

$$\begin{cases} f(t) = t \quad si\ 0 \le t < 1 \\ f(t) = 1 \quad si\ 1 \le t < 3 \\ f(t) = 4 - t \quad si\ 3 \le t < 4 \end{cases}$$

Marche à suivre :

- Établir que f est paire.

Soit $S(t) = a_0 + \sum_{1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(n\omega t\right) + b_n \sin\left(n\omega t\right) \right)$ la série de Fourier associée à f

.

- Déterminer a_0 et ω ; Montrer que, pour n ≥ 1 :

$$a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1\right]$$

CHAPITRE 6

TRANSFORMATION DE LAPLACE

La méthode de Laplace permet de transformer la résolution d'une équation différentielle en équation algébrique. Lorsqu'un élément de circuit ou un composant est **excité** par un courant ou une tension quelconque, il entre en **régime transitoire**. Sa **réponse** est alors facilement calculée par la transformation de Laplace.

6.1 Transformée de Laplace

La définition de la transformée de Laplace est moins importante que ses propriétés, car on utilisera le plus souvent un tableau des transformées usuelles, permettant de transformer l'équation différentielle temporelle en équation de Laplace algébrique, que l'on résout, avant de revenir à la solution de l'équation différentielle de base.

6.1.1 Définition

Soit *f* une fonction de la variable réelle *t*, définie sur R et supposée nulle pour *t* négatif (**fonction causale**)

On appelle transformée de Laplace de *f*, la fonction *F* définie par:

$$\mathbf{F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p.t}.f(t).dt}$$

Où $p = \alpha + j\omega$est une variable complexe.

$$\begin{cases} F(p) \text{ est l'image de } f(t) \text{ par la transformation de Laplace} \\ f(t) \text{ est l'original de } F(p) \end{cases}$$

On écrit :**F(p) = L [f(t)] ou F(p) ⊂ f(t)**

f(t) = L^{-1} [F(p)] ou f(t) ⊃ F(p)

La transformée de Laplace d'une fonction n'existe que si l'intégrale est convergente, pour cela on est amené à imposer à *f* deux conditions :

-être continue par morceaux sur tout fermé *[0 ; x_0]*

-être "d'ordre exponentiel à l'infini", c'est à dire qu'il existe M>0 et α tels que $|f(t)| < Me^{\alpha \cdot t}$ pour t > X.

On démontre que si les hypothèses précédentes sont vérifiées, la transformée de Laplace est définie

Pour $p>\alpha$, *ou* si *p* est complexe, pour $\Re(p) > \alpha$.

Le domaine de convergence de $F(p)$ est $]\alpha ; \infty[$ $(\alpha \in R)$ ou encore, le demi plan complexe $\Re(p) > \alpha$ $(\alpha \in C)$.

Par la suite on ne considère en général que $\Re(p) > 0$.

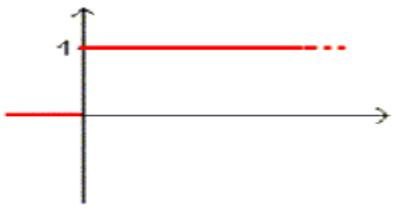
6.1.2 Transformée de fonctions élémentaires

Les fonctions élémentaires pour nous les électrotechniciens : ce sont des fonctions continues, de vitesse, d'accélération, de pente, de charge et de décharge…

6.1.2.1 Fonction échelon unité (fonction d'Heaviside) U(t)

$$U(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Figure12 : **fonction échelon**



$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p.t}.1.dt = \left[\frac{e^{-p.t}}{-p}\right]_0^{\infty}$$ **Si $\Re(p)>0$ alors**

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{e^{-p.t}}{-p} = 0$$

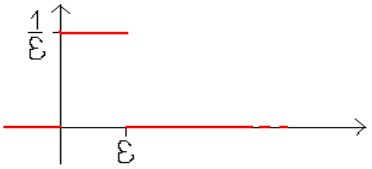
Ce qui implique :

$$\mathbf{L(U(t))=\frac{1}{P}}$$

6.1.2.2Fonction impulsion unité (Distribution de Dirac)

$$\delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & 0 \le t \le \varepsilon \\ 0 & t > \varepsilon \end{cases}$$

Figure13 : **fonction impulsion**



$\forall \varepsilon$, on a(***ε: epsillon)***,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t).dt = 1$$

.

Siε tend vers 0, la distribution de Dirac qui n'est pas une fonction sert à représenter en physique une action s'exerçant sur un instant très court (impulsion)

Figure 14: **fonction de Dirac**



$$L(\delta(t)) = F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p.t}.\frac{1}{\varepsilon}.dt = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} e^{-p.t}.dt = \left[\frac{e^{-p.t}}{-p}\right]_0^{\varepsilon}$$

Avec$\Re(p)>0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}.\left[\frac{e^{-p.\varepsilon}}{-p} + \frac{1}{p}\right] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1 - e^{-p.\varepsilon}}{p.\varepsilon} = 1$$

On utilise les développements limités ou la règle de l'Hôpital)

$$L(\delta(t)) = 1$$

6.1.2.3 Fonction puissance

Soit

$$t^n.U(t) = \begin{cases} t^n & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} (n \in N).$$

Calculons donc

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p.t}.t^n.dt = I_n$$

Rappelons l'intégration par partie tel que :

$$u = t^n \qquad du = nt^{n-1}.dt$$
$$dv = e^{-p.t}.dt \qquad v = \frac{e^{-p.t}}{-p}$$

Posons le changement de variables :

$$I_n = \left[t^n.\frac{e^{-p.t}}{-p} \right]_0^{\varepsilon} + \frac{n}{p} \int_0^{+\infty} e^{-p.t}.t^{n-1}.dt$$

(Le premier crochet est nul si $\Re(p)>0$)

D'où

$$I_n = \frac{n}{p} I_{n-1}$$

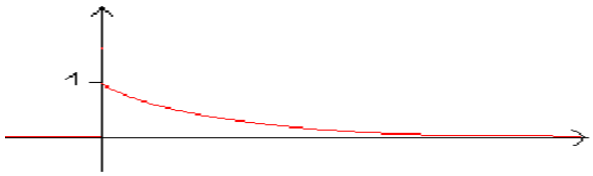
$$I_0 = \frac{1}{p}; \quad I_1 = \frac{1}{p^2}; \quad I_2 = \frac{2}{p^3}; \ldots \ldots \ldots \quad I_n = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

$$F(p) = L(t^n.U(t)) = \frac{n!}{p^{n+1}} (n \in N)$$

6.1.2.4 Fonction exponentielle

$$F(p) = e^{-a.t}.U(t) = \begin{cases} e^{-a.t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Figure 15: **fonction exponentielle**



$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p.t}.e^{-a.t}.dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a).t}.dt = \left[\frac{e^{-(p+a).t}}{-(p+a)}\right]_0^{\infty}$$

Si $\Re\ (p + a) > 0$ alors,

$$\lim_{t \to \infty} e^{-(p+a).t} = 0$$

d'où ($\Re\ (p) > -\Re\ (a)$)

$$F(p) = L(e^{-a.t}.U(t)) = \frac{1}{p+a}$$

6.1.3 Exercice

La transformée de Laplace de la fonction suivante : $f(t)= 2t^2$

Est $F(p) = 2/p^3$ **V** **F**

Encercler V si la réponse est vraie ou F si la réponse est fausse.

6.2 Propriétés de la transformée de Laplace

On a besoin de quelque propriété concernant Laplace pour nous guidé et nous facilité le travail**.**

6.2.1 Linéarité

$\forall\alpha$ et $\forall\beta \in$ C et L[f(t)] = F(p) et L[g(t)] = G(p)

$$L\ [\alpha\ .f(t) + \beta.g(t)] = \alpha\ .\ F(p) + \beta.\ G(p)$$

Transformée de Laplace de cos ωt.U(t) et sinωt.U(t)

$$L(\cos\omega t) = L\left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[L(e^{j\omega t}) + L(e^{-j\omega t})\right] = \frac{1}{2}.\left[\frac{1}{p - j\omega} + \frac{1}{p + j\omega}\right]$$

D'où

$$L(\cos\omega t) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

De même pour $\sin\omega t$:

$$L(\sin\omega t) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

6.2.2 Règle de similitude (Changement d'échelle)

Soit $g(t) = f(at)$ ($a>0$)

$$F(p) = L[g(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-p.t}.g(t).dt = \int_0^{+\infty} e^{-p.t}.f(a.t).dt$$

On pose alors le changement de variables :

$u = a.t$

$du = a.dt$

$$L[g(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{a}u}.f(u).\frac{du}{a} = \frac{1}{a}.\int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{a}u}.f(u).du = \frac{1}{a}.F(\frac{p}{a})$$

$$L[f(a.t)] = \frac{1}{a}.F(\frac{p}{a})$$

6.2.3 Règle de translation en p

$$L[e^{-a.t}.f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-p.t}.e^{-a.t}.f(t).dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a).t}.f(t).dt = F(p+a)$$

$$L[e^{-a.t}.f(t)] = F(p+a)$$

$$L(e^{-a.t}.\cos\omega t) = \frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$$

6.2.4 Règle de translation en t

$$L[g(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-p.t}.g(t).dt = \int_0^{t_0} e^{-p.t}.0.dt + \int_{t_0}^{+\infty} e^{-p.t}.f(t-t_0).dt$$

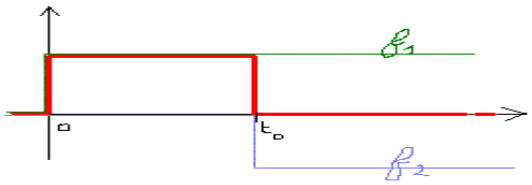
On pose $u = t - t_0$ et $du = dt$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-p.(u+t_0)}.f(u).du = e^{-p.t_0}.\int_0^{+\infty} e^{-p.u}.f(u).du = e^{-p.t_0}.F(p)$$

$$L[f(t-t_0)] = e^{-p.t_0}.F(p)$$

$e^{-p.t_0}$ Est appelé **facteur retard**

Figure16 :Image d'un créneau entre 0 et t_0.



$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = U(t) - U(t - t_0)$$

$$F(p) = \frac{A}{p} - \frac{A}{p}.e^{-p.t_0}$$

,

d'où

$$F(p) = \frac{A}{p}(1 - e^{-p.t_0})$$

Application: Transformée d'une fonction périodique.

Soit f une fonction périodique pour t>0 de période T,en appliquant la linéarité et le théorème du retard

$$L[(f(t)] = L[\sum f_n(t)]$$

Il suffit de connaître la transformée de $F_0(p)$ de la fonction f_0 qui coïncide avec f

Sur [0 ; T].

6.2.5 Transformée de la dérivée.

Si f' est continue par morceaux sur tout fermé [0; x0], et si alors en effet en intégrant par parties, on obtient:

Commef(0^+) représentant la limite à droite de f(t) quand t –> 0, d'où le théorème

Généralisation: Si **f''** vérifie à son tour les hypothèses du théorème,

On a: **''Dériver c'est multiplier par p''**

Cette propriété, qui fait la richesse de la transformée de Laplace sera largement utilisée dans les équations différentielles

$$\mathbf{L\,(f'(t)) = P.L(f)-f\,(0^+)}$$

$$\mathbf{L\,(f''(t)) = P[P.L(f)-f\,(0^+)]-f'\,(0^+)}$$

Dans une inductance ℓ , l'intensité à $t=0^-$ est I_0. Exprimer la transformée de Laplace de la tension.

$$u(t) = \ell \frac{di}{dt}$$
$$L(\frac{di}{dt}) = pI(p) - I_0$$
$$U(p) = \ell pI(p) - \ell I_0$$

6.2.6 Transformée de la primitive

Faire l'intégrale d'une fonction c'est **diviser** par l'opérateur de Laplace P

$$L\left(\int_{0-}^{t\geq 0} f(t)dt = \frac{L(f)}{P}\right.$$

Dans une capacité, exprimer la transformée de Laplace du couranti.

$$u = \int_{t=0-}^{t} \frac{i}{C}\,dt$$
$$U(p) = \frac{I(p)}{Cp}$$

6.2.7Théorème de la valeur initiale

Le $f(0^+)$ c'est une valeur initiale de f(t) et Le $f'(0^+)$ c'est une valeur initiale de f'(t)

$$\mathbf{Lim\ f(t) = f(0^+)=Lim\ P\ f(P)}$$
$$\mathbf{t \to 0^+ \qquad p \to +\infty}$$

$$u(t) = \ell \frac{di^{o}}{dt}$$

$$i(O^{-}) = I_o$$

$$U(p) = \ell p I(p) - \ell I_o$$

$$I(p) = \frac{U(p) + \ell I_o}{\ell p}$$

$$i(O^{+}) = \lim_{p\to\infty} p \frac{U(p) + \ell I_o}{\ell p} = \lim_{p\to\infty} p \frac{U(p)}{\ell p} + I_o$$

$$Or \lim_{p\to\infty} pU(p) = U(O^{+}) \neq 0$$

$$\lim_{p\to\infty} p \frac{U(p)}{\ell p} = 0$$

$$\lim_{p\to\infty} p \frac{U(p)}{\ell p} + I_o = I_o$$

$$i(O^{-}) = i(O^{+})$$

On retrouve ainsi la non-discontinuité du courant dans une inductance.

6.2.8Théorème de la valeur finale

$$\text{Lim } f(t) = f(0^{+}) = \text{Lim } P\, f(P)$$

$$t \to +\infty \quad p \to 0$$

Équation du Condensateur $U(p) = \frac{E}{p(1+RCp)}$

$$u(\infty) = \lim_{p\to 0} pU(p) = \lim_{p\to 0} \frac{Ep}{p(1+RCp)} = E$$

6.2.9 Exercice

La transformée de Laplace de la fonction suivante : **$f(t) = e^{-at}\sin(w.t)$**

est $F(P) = \frac{w}{w^2+(p+a)^2}$ **V** **F**

Encercler V si la réponse est vraie ou F si la réponse est fausse.

6.3 Transmittance de Laplace – Impédance opérationnelle

En général, la transmittance est le rapport caractérisant la transmission d'une grandeur dans un système. Elle se calcule par le rapport entre la grandeur en entrée et en sortie.

6.3.1Transmittanceopérationnelle

Soit un système soumis à une grandeur d'entrée u(t) et répondant à cette entrée par y(t).

L'équation différentielle du temps entre les u et y s'écrit par exemple :

$$ay''+by'+cy = du'''+eu''+fu'+gu$$

Toutes les variables et leurs dérivées sont nulles à t=0.

Traduite en transformée de Laplace, cette équation s'écrit :

$$ap^2Y + bpY + cY = dp^3U + ep^2U + fpU + gU$$

La transmittance opérationnelle du système est :

$$T(p) = \frac{Y}{U} = \frac{ap^2 + bp + c}{dp^3 + ep^2 + fp + g}$$

6.3.2 Impédance opérationnelle

L'impédance opérationnelle Z(p) est la transmittance U/I d'un composant.

$$U(p) = Z(p)I(p)$$

Tableau des impédances opérationnelles. On rappelle à côté de chaque composant l'impédance complexe.

Figure17 : Impédance opérationnelle des composants

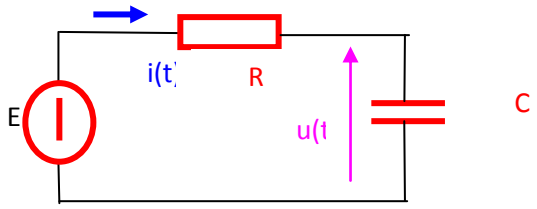
Composants	**Impédance Opérationnelle**	**Impédance complexe**
Résistance	**R**	**R**
Inductance	**LP**	**JLW**
Capacité	**1/CP**	**1/JCW**

Figure18 : Quelques transformées usuelles

Fonction temporelle	Transformée de Laplace
Echelon : E	$\frac{E}{p}$
Rampe : A.t	$\frac{A}{p^2}$

K.exp(-at)	$\frac{K}{p+a}$
$\frac{1}{T}\exp(-\frac{t}{T})$	$\frac{1}{1+Tp}$
$1-\exp(-\frac{t}{T})$	$\frac{1}{p(1+Tp)}$
$\frac{1}{T_1-T_2}(\exp(-\frac{t}{T_1})-\exp(-\frac{t}{T_2}))$	$\frac{1}{(1+T_1p)(1+T_2p)}$

6.3.3 Exemple : Charge d'un condensateur initialement déchargé par un générateur de tension



Equations temporelles : Equation différentielle régie par u.

$$E = Ri + u$$
$$i = C\frac{du}{dt}$$
$$E = RC\frac{du}{dt} + u$$

Solution particulière de l'équation: u=E, C'est la valeur de u au bout d'un temps « très long »

Solution générale de l'équation sans second membre : $u = K\exp(-\frac{t}{RC})$

Conditions initiales : u(0)=0. $\tau = R.C$

$$u(t) = E(1-\exp(-\frac{t}{\tau}))$$

Equations algébriques de Laplace

La tension d'excitation passe brutalement à t=0 de 0 à E. ceci est physiquement improbable, mais on suppose le temps de montée très court. On dit que l'excitation est

un échelon de tension.

A $t=0^-$, ce qui signifie immédiatement avant t=0, u=0.

A $t=0^+$, ce qui signifie immédiatement après t=0,u=E

On applique la transformée de Laplace à l'équation différentielle selon les règles vues plus loin :

A E on associe la fonction de la variable p : $\frac{E}{p}$

A la variable u on associe la transformée U(p)

A la dérivée temporelle de u, on associe sa transformée p.U(p)

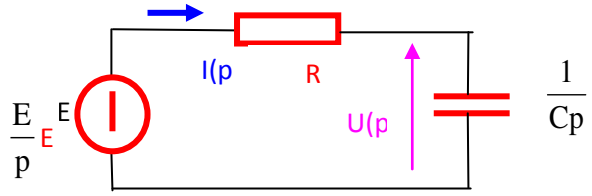
L'équation temporelle devient : E/P= $RC\ pU(P) + U(P)$

Soit: $U(p) = \frac{E}{p(1+RCp)}$

Le retour à u(t) donne la même solution que l'équation différentielle.

De plus on appelle impédance opérationnelle du condensateur, l'expression $\frac{1}{Cp}$.

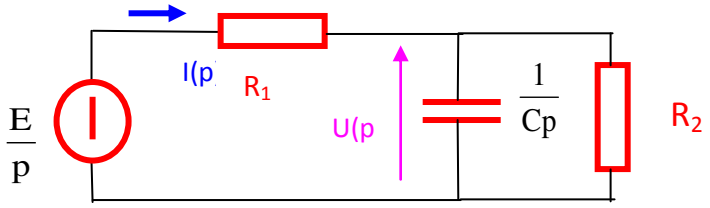
On obtient alors un schéma équivalent du circuit en opérationnel, avec en majuscule, les transformées de Laplace des variables électriques. Le traitement du circuit se traite alors comme avec les impédances complexes en régime sinusoïdal en remplaçant jω par la variable p.



En appliquant la loi d'Ohm au circuit avec les grandeurs opérationnelles, on retrouve l'équation algébrique de Laplace, image de l'équation différentielle.

6.3.4Exercice

La réponse de U(P) et U(t) de l'Atténuateursuivant indiquée si dessous est : **V F**



$$U = \frac{E}{p}\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)\frac{1}{1+\frac{R_2R_1C}{R_1+R_2}} \quad u(t) = \left(\frac{ER_2}{R_1+R_2}\right)\left(1-\exp-\left(\frac{(R_1+R_2)t}{R_1R_2C}\right)\right)$$

Encercler V si la réponse est vraie ou F si la réponse est fausse.

6.4 Résumé

La résolution mathématique d'une fonction débute à partir de l'intégral en appliquant la loi de la transformée de Laplace.

Pour calculer la transformée de Laplace d'une fonction :

-Il faut connaitre toute ses propriétés.

-Si les conditions initiales sont nulles, dériver en temporel revient à multiplier par P ;

De la même manière, intégrer en temporel revient à diviser par P en Laplace.

Cette partie nous sert essentiellement quand on est en électronique ou bien en asservissement.

- Il faut connaitre les deux tableaux
- Il faut savoir déterminer l'équation temporelle de n'importe que circuit électrique.
- Il faut utiliser les propriétés déjà vues pour déterminer la fonction opérationnelle.
- En utilisant la table des transformées de Laplace usuelles, il est possible de trouver la réponse temporelle de la sortie.

6.5 Exercice de synthèse

Spécialité : Electrotechnique

Module : Appliquer des notions de mathématiques liées au domaine de l'électrotechnique

Durée : 1h30 mn

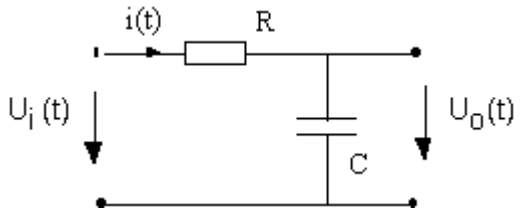
But :c'est de familiariser les stagiaires à la résolution des transformées de Laplace

Matériel requis :

- Calculatrice
- Document approprié

Mise en situation :

Soit le circuit RC:



Marche à suivre :

- A l'aide des tables de transformation de Laplace, donner la fonction de transfert de ce filtre

CHAPITRE 7

PROBALITES ET STATISTIQUES

La théorie des probabilités est l'étude des phénomènes liés au hasard. Lorsqu'on lance une pièce de monnaie, on sait que l'issue de l'expérience peut être soit pile, soit face, mais on ne peut en connaître le résultat avant sa réalisation. Et les statistiques sont une branche des mathématiques consistant à analyser et interpréter une série de données présentée sous forme brute. L'exploitation de ces données est de nos jours grandement facilitée par les calculatrices et les ordinateurs.

7.1 Statistique descriptive

Ensemble des techniques visant à résumer l'information contenue dans un ensemble de données à l'aide de graphiques, de tableaux et d'indicateurs numériques.

7.1.1Statistique descriptive à une variable

7.1.1.1Tableaux statistiques et diagrammes

Les tableaux statistiques et les diagrammes permettent d'organiser et de présenter les données recueillies.

Le caractère étudié peut être ***qualitatif*** ou ***quantitatif***. Un caractère quantitatif peut être

Discret: il ne peut prendre que des valeurs isolées ;

Continu : il peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle.

Dans le cas d'une répartition en classes, on utilise un histogramme pour représenter graphiquement les effectifs (ou les fréquences) : les aires des rectangles sont proportionnelles aux effectifs (ou aux fréquences).

Pour tracer le **polygone des effectifs cumulés croissants**, on place les points dont :

L'abscisse est la limite supérieure d'une classe ;

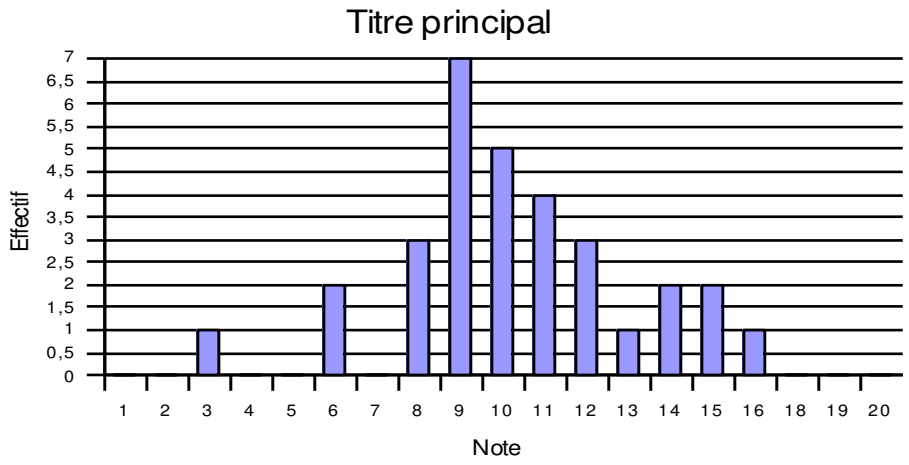
L'ordonnée est l'effectif cumulé croissant de cette classe.

Exemples *:* Les élèves d'une classe de Bac réalisent trois enquêtes dont les informations sont données dans les tableaux suivants :

Figure19: Notes obtenues par les 31 élèves de l'évaluation de français

Note x_i	**Effectif** n_i
3	**1**
6	**2**
8	**3**
9	**7**
10	**5**
11	**4**
12	**3**
13	**1**
14	**2**
15	**2**
16	**1**
	31

Figure20 : Diagramme en bâtons

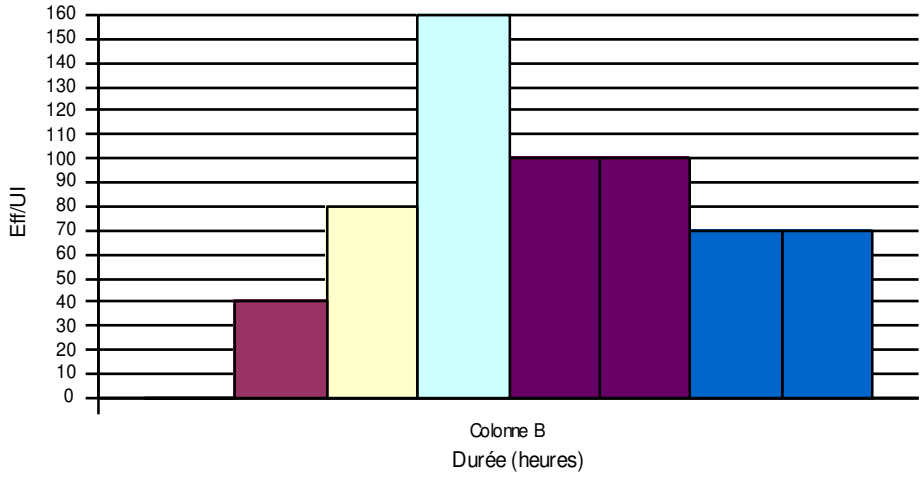


La notation est un caractère quantitatif (mesurable) discret (il prend des valeurs isolées).
Le temps consacré chaque semaine par les élèves du lycée à regarder la télévision.
Population interrogée : les 620 élèves du lycée.
Intervalle unitaire (IU) : 4 heures
On calcule les **Effectif/UI**. La hauteur des rectangles correspond à l'effectif par intervalle unitaire.

Figure21: temps consacré chaque semaine par les élèves du lycée à regarder la télévision

Durée *h*	**Effectif n_i**	**Effectif/UI**
[0 ; 4[**[4 ; 8[** **[8 ; 12[** **[12 ; 20[** **[20 ; 28[**	**40** **80** **160** **200** **140**	**40** **80** **160** **100** **70**
	620	

Figure22 : Histogramme



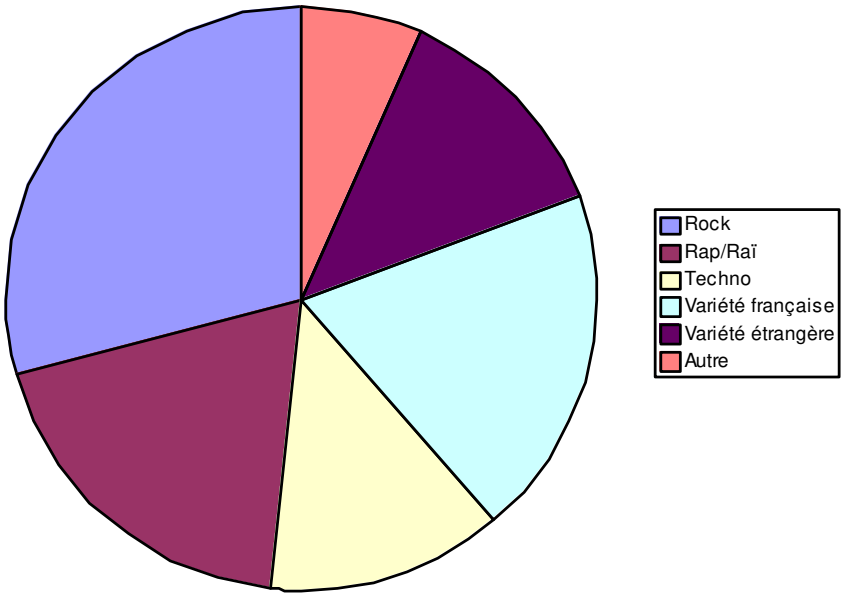
La durée est un caractère quantitatif continu (il peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle).

Figure23 : la musique préférée des élèves du lycée. On calcule les angles des secteurs
Correspondants aux effectifs n_i

figure23 : la musique préférée des élèves du lycée. .

Type de musique	Effectif n_i	Angle
Rock	180	105°
Rap/Raï	120	70°
Techno	80	46°
Variété française	120	70^0
Variété étrangère	80	46°
Autre	40	23°
	620	360°

figure24 : Diagramme circulaire



Le caractère étudié est un caractère qualitatif (non mesurable).

7.1.1.2 Mode et étendue statistique

On appelle **mode d'une distribution statistique** la valeur de la variable qui a le plus grand effectif.
Dans le cas d'une distribution en classes, on appelle **classe modale** la classe qui a le plus grand effectif par intervalle unitaire.
Le centre de la classe modale est appelé **mode.**

Exemple :
Dans le tableau 19, la note qui a été le plus attribuée est 9.
9 est le mode de cette série statistique.
L'étendue d'une série statistique est la différence entre les valeurs extrêmes du caractère. Dans le tableau 14, la note minimum est 3, le maximum est 16.
L'étendue est donc 16-3 = 13

7.1.1.3 Les indicateurs de l'analyse statistique

Poids des sachets (en g) x_i	nombre de sachets n_i	Effectif cumulé croissant ECC

-La moyenne d'une série statistique, notée $\bar{x}$ est obtenue par :

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_p x_p}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{N}$$

Avec :

$N = \sum_{i=1}^{p} n_i$ et N effectif total

x_i : Valeur du caractère ou centre des classes

n_i : Effectif de x_i ou de la classe de centre x_i

p : nombre de classes ou de valeurs différentes du caractère.

Exemple : dans le tableau 19, la note moyenne est calculée par :

$$\bar{x} = \frac{1\times3+2\times6+3\times8+7\times9+5\times10+4\times11+3\times12+1\times13+2\times14+2\times15+1\times16}{31} = 10{,}06$$

-Variance et écart type d'une série statistique :

La variance

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2$$

L'écart type

$$\sigma = \sqrt{V}$$

]0 ; 50]	20	20
]50 ; 100]	70	90
]100 ; 150]	140	230
]150 ; 200]	70	300
]200 ; 250]	60	360
]250 ; 300]	30	390
]300 ; 350]	10	400
	400	

- Plus σ est grand, plus les valeurs de la variable sont dispersées.
- Lorsque la distribution statistique peut être représentée par une "courbe de Gauss",
- on constate la répartition suivante des effectifs autour de la moyenne $\overline{x}$

Durée (h)	Effectif n_i	centre x_i	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i(x_i - \bar{x})^2$
[0 ; 4[	40	2	144	5760
[4 ; 8[	80	6	64	5120
[8 ; 12[	160	10	4	640
[12 ; 20[	200	16	4	800
[20 ; 28[	140	24	100	14000
	620			26320

Exemple *:* Calcul de l'écart-type pour le tableau temps consacré chaque semaine à regarder la télévision :

Moyenne $\bar{x} = \dfrac{40\times 2 + 80\times 6 + 160\times 10 + 200\times 16 + 140\times 24}{620} = 14\,h$

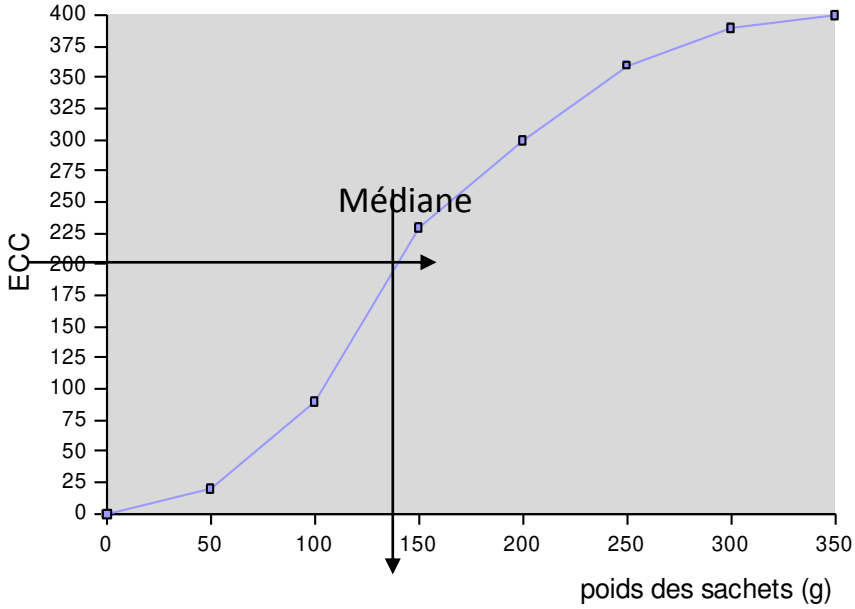
Variance $V = \dfrac{26320}{620} = 42{,}45$

Ecart-type $\sigma = \sqrt{42{,}45} = 6{,}5$ soit 6 h 30 min

- La médiane :

C'est la valeur de la variable telle que le nombre de valeurs qui lui sont inférieures est égal au nombre de valeurs qui lui sont supérieures.

Exemple *:* La distribution statistique suivante a été établie suivant les ventes de sachets de bonbons dans un libre-service :



Le rang de la médiane est $\frac{N}{2} = \frac{400}{2} = 200$. La droite (AB) d'ordonnée $\frac{N}{2}$ et parallèle à l'axe des abscisses coupe la courbe en M. L'abscisse du point M, égale à 139 est la valeur médiane de la série statistique.

7.1.2Statistique descriptive à deux variables

7.1.2.1Caractérisation d'une série statistique à deux variables :

Une série statistique à deux variables est une série dont les valeurs sont données par les couples $(x\ ;\ y)$.
Elle est représentée dans un repère orthogonal par tous les points de coordonnées $(x\ ;\ y)$.
L'ensemble de ces points forme un nuage de points. Ce nuage peut avoir une forme allongée, curviligne ou très dispersée.

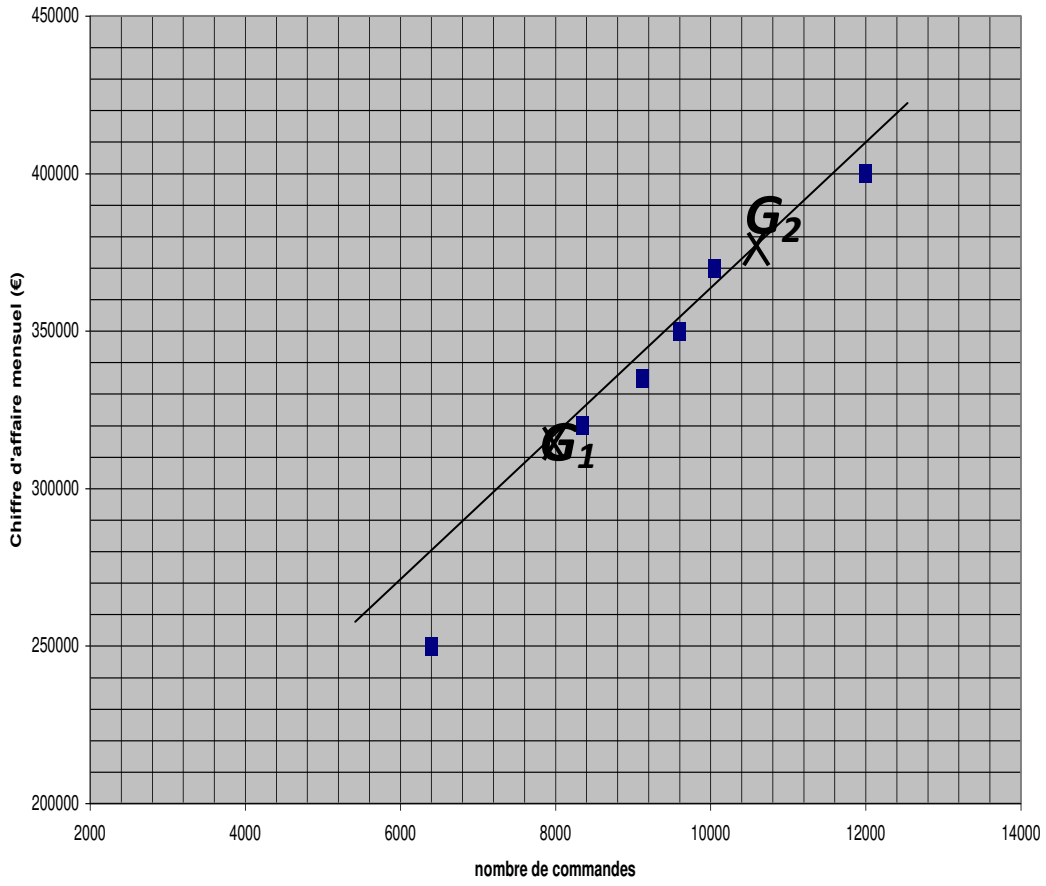
7.1.2.2Droite d'ajustement affine : Méthode de Mayer

Dans le cas d'un nuage de points de forme allongée, et afin de faciliter l'étude de la série, il est possible de remplacer ce nuage par une droite appelée droite d'ajustement affine. Pour tracer cette droite, on utilise la méthode de Mayer.

Exemple *:* Le tableau suivant donne le chiffre d'affaire réalisé au cours des 6 derniers mois par un site de vente en ligne en fonction du nombre de commandes reçues.

Nombre de commandes x_i	6 400	8 350	9 125	9 600	10 050	12 000
Chiffre d'affaires mensuelles y_i (€)	250 000	320 000	335 000	350 000	370 000	400 000

Représentation du nuage de points



Calcul des coordonnées des points moyens G_1 et G_2 :

On partage le nuage de points en deux groupes de même importance suivant les valeurs croissantes de x_i, et on calcule les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 de chaque groupe de points.

Coordonnées de G_1 $(\bar{x}_1 ; \bar{y}_1)$ avec

- $\bar{x}_1$ = moyenne des valeurs x du premier groupe
- $\bar{y}_1$ = moyenne des valeurs y du premier groupe.

$$\bar{x}_1 = \frac{6400 + 8350 + 9125}{3} \approx 7\,960$$

$$\bar{y}_1 = \frac{250\,000 + 320\,000 + 335\,000}{3} \approx 310\,650$$

Donc G_1 (7 960 ; 310 650)

• Coordonnées de G_2 $(\bar{x}_2 ; \bar{y}_2)$ avec $\bar{x}_2$ = moyenne des valeurs x du deuxième groupe et $\bar{y}_2$ = moyenne des valeurs y du deuxième groupe.

$$\bar{x}_2 = \frac{9\,600 + 10\,050 + 12\,000}{3} \approx 10\,550$$

$$\bar{y}_2 = \frac{350\,000 + 370\,000 + 400\,000}{3} \approx 373\,330$$

Donc G_2 (10 550 ; 373 000)

On trace la droite d'ajustement qui passe par les deux points G_1 et G_2.

7.1.2.3Equation de la droite d'ajustement affine

L'équation de la droite d'ajustement est de la forme $y = a\,x + b$

Rappelons que toute droite passant par les points A $(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ a pour équation

$$\boldsymbol{y = a\,x + b} \text{ avec } \boldsymbol{a} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \text{ et } \boldsymbol{b} = y_A - a\,x_A = y_B - a\,x_B$$

Dans le cas précédent ,la droite passant par les points :

G_1 (7 960 ; 310 650) et G_2 (10 550 ; 373 000),

A pour coefficient directeur :

$$a = \frac{373\,000 - 310\,650}{10\,550 - 7\,960} \approx 24$$

$b = 310\,650 - 24 * 7\,960 \approx 119\,700$

La droite d'ajustement affine a donc pour équation : $y = 24x + 119\,700$

7.1.3 Exercice

La variance de la série des tailles des 35 élèves d'une classe, donnée par le tableau suivant lors de la présentation des séries statistiques continues :

Valeur du caractère	[160 ; 165[	[165 ; 170[	[170 ; 175[	[175 ; 180[	[180 ; 185[	[185 ; 190[
Effectif	1	5	12	12	3	2

La réponse correspond a:

A. V=30, 53 B. V=31,50 C. V=30,00

7.2 Analyse Combinatoire

Compter les ensembles finis et leurs sous-ensembles utilisés dans la théorie des probabilités discrètes

7.2.1Définitions

E = {1,2,..., n}

Factorielle

On appelle factorielle de n le produit des entiers naturels de 1 à n.

Notation n ! = 1.2.3.4….n

Par convention 0 ! = 1

Permutation :

Bijection de E dans E qui détermine un ordre total

Nombre de permutations sur E = n ! = n(n-1)(n-2).....1

Arrangement d'ordre k ≤ n

Sous-ensemble totalement ordonné ayant k éléments de E

Nombre d'arrangements :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)...(n-k+1)$$

Combinaison d'ordre k ≤ n

Sous-ensemble de E ayant k éléments

Nombre de combinaisons :

$$C_n^k = \frac{n!}{K!(n-k)!} = \frac{n\,(n-1)\ldots(n-k+1)}{K\,(k-1)\ldots 1}$$

7.2.2 Compléments

Arrangement d'ordre k avec répétitions

Suite ordonnée de k éléments, chaque élément pouvant être répété un nombre quelconque de fois nombre d'arrangements d'ordre k avec répétitions : n^k

Combinaison d'ordre k avec répétitions

Ensemble non ordonné de k éléments, chaque élément pouvant être répété un nombre quelconque de fois nombre de combinaisons d'ordre **k** avec répétitions

$$C_{n+k-1}^{k}$$

7.2.3 Exercice

La combinaison du jeu du loto national, la combinaison gagnante est obtenu en effectuant un tirage de 6 numéros parmi 49 ?

La réponse correspond a:

A. C_{49}^{6} =12083816

B. C_{49}^{6} =14683816

C. C_{49}^{6} =13983816

7.3 Généralités sur les Probabilités

Pour pouvoir cerner nos connaissances on va voir quelque généralités sur les probabilités.

7.3.1 Vocabulaire Spécifique des Evénements

Épreuve ou expérience aléatoire

Événement : réalisation d'un résultat possible de l'épreuve

ΩEnsemble des résultats possibles

A ensemble des événements = famille non vide de parties de Ω stable

- par passage au complémentaire,
- par réunion finie ou dénombrable,
- par intersection finie ou dénombrable.

ωÉvénement élémentaire

A = Ω est l'événement certain

A = ∅ est l'événement impossible

(A ou B) l'événement A est réalisé ou l'événement B est réalisé ou les événements A et B sont réalisés.

Notation : A ∪ B

(A et B) les événements A et B sont réalisés simultanément. Notation : A ∩ B

Non A est l'événement complémentaire de A, il est réalisé si l'événement A n'est pas réalisé. Notation : A

A et B sont incompatibles si leur réalisation simultanée est un événement impossible, on écrit : A ∩ B = ∅

7.3.2 Probabilité d'un Evénement

Définition axiomatique : C'est une fonction Pr de A dans [0,1]

$A \in A \rightarrow Pr\{A\} \in [0,1]$ (Pr : Probabilité)

Vérifiant les propriétés

- $Pr\{\Omega\} = 1$
- Si $A \cap B = \varnothing$ alors $Pr\{A \cup B\} = Pr\{A\} + Pr\{B\}$

Conséquences :

* $Pr\{A\} = 1 - Pr\{A\}$
* $Pr\{\varnothing\} = 0$
* pour toute suite finie d'événements incompatibles deux à deux

$$\mathbf{Pr\{A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n\} = \sum_{i=1}^{n} (Pr\{Ai\})}$$

Probabilités totales

$Pr\{A \cup B\} = Pr\{A\} + Pr\{B\} - Pr\{A \cap B\}$

Propriété : Si les événements élémentaires sont équiprobables alors Pr {A} est le rapport « nombre de cas favorables » sur « nombre de cas possibles ».

7.3.3 Probabilités Conditionnelles

On appelle probabilité conditionnelle (ou liée) de l'événement B par rapport à l'événement A, la probabilité de réalisation de l'événement B, sachant que l'événement A est réalisé.

Probabilité de B sachant A : Pr {B/A}

$$Pr\{B/A\} = \frac{Pr\{A \cap B\}}{Pr\{A\}}$$

Conséquence

Pr {A ∩ B} = Pr {B}.Pr {A/B} = Pr {A}.Pr {B/A}

Événements indépendants : A et B sont indépendants en probabilité si la réalisation ou la non-réalisation de A n'affecte pas la probabilité de la réalisation de B.

Pr {B/A} = Pr {B}

Conséquence

Pr {A ∩ B} = Pr {A}.Pr {B} seulement si les événements sont indépendants.

Théorème de BAYES

Si (Hi) est une partition de **Ω**alors

$$\mathbf{Pr\{Hi/A\} = \frac{Pr\{Hi\}.P\{A/Hi\}}{Pr\{A\}}}$$

$$\mathbf{Pr\{Hi/A\} = \frac{Pr\{Hi\}.P\{A/Hi\}}{Pr\{H1\}.P\{A/H1\} + ... + Pr\{Hn\}.P\{A/Hn\}}}$$

7.3.4 Exercice

Dans un atelier, on s'intéresse à deux machines a et b. La machine fournit 80% des pièces dont 5% sont défectueuses. La machine b fournit 20% des pièces dont 4% sont défectueuses. Une expérience consiste à choisir au hasard une pièce parmi la production journalière de cet atelier et on souhaite déterminer la probabilité qu'elle soit défectueuse.

On note A : " La pièce a été produite par la machine a", B : " La pièce a été produite par la machine b"et D : "La pièce est défectueuse".

On peut traduire les données en termes de probabilités. On a donc :

P(A) = 0,8 ; P(B) = 0,2 ; P(D/A) = 0,05 ; P(D/B) = 0,04.

D'après la formule de la probabilité totale, on peut écrire :

P(D) = 0,048On obtient alors : P(A/D) =0,833 De même, P(B/D) =0,167**V** **F**

Encercler V si la réponse est vraie ou F si la réponse est fausse.

7.4 Variables Aléatoires

Définir une variable aléatoire sur l'univers U d'une expérience aléatoire, c'est donc le fait d'associer un nombre réel à chaque événement élémentaire de cette expérience aléatoire. Il existe deux types de variables aléatoires : Les variables aléatoires discrètes ; les variables aléatoires continues.

7.4.1 Généralités

E : une expérience aléatoire

Ω : L'ensemble des résultats possibles

A : l'ensemble des événements

P : une probabilité définie sur A

Une fonction X de Ω dans R est une variable aléatoire si pour tout I de R

$\{ \omega \in \Omega | \ X(\omega) \in I \} \in A$

Notation: $X \in I$

Une variable aléatoire (v.a.) est discrète si elle ne prend que des valeurs ponctuelles, isolées.

Une variable aléatoire v.a. est continue si l'ensemble de ses valeurs est une réunion d'intervalles de R.

Fonction de répartition:

La fonction de répartition d'une v.a. X est la fonction F définie par

$F(x) = P(X \leq xi)$

7.4.2 Variables Aléatoires discrètes

Loi de probabilité

C'est l'ensemble des couples $(x_i ; Pr(X = x_i))$ i

notation: $Pr(X = x_i) = p(x_i) = p_i$

Condition: $\sum p_i = 1$

i

Fonction de répartition:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} Pr(X = x_i)$$

Espérance mathématique E(X)

$$E(X) = \sum_i Pr(X = x_i).x_i = \sum_i (p_i.x_i)$$

Variance V(X) et écart-type σ_X

$V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E(X)^2$

$V(X) = \Sigma Pr(X = x_i).(x_i)^2 - (E(X))^2$

$\mathbf{V(X) = \Sigma pi.(xi)^2 - (E(X))^2}$

$\mathbf{\sigma_X = \sqrt{V(X)}}$

7.4.2.1Couplede variables

Aléatoires discrètes

Soit Z = (X , Y) un couple de v.a discrètes.

La v.a X peut prendre les valeurs $x_1 , x_2, ... ,x_n$

La v.a Y peut prendre les valeurs $y_1 , y_2, ... ,y_p$

$p_{ij} = P\{ Z =(x_i ,y_j)\} = P\{(X = x_i) \cap (Y = y_j)\}$

Loi de Z est donnée sous forme de tableau

Lois marginales

Ce sont les lois de X et de Y

$$P(X = x_i) = \sum_j p_{ij}$$

$$P(Y = y_j) = \sum_i p_{ij}$$

Variables aléatoire indépendantes

Quelque soit $\forall i, j \quad P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P(X = x_i).\ P(Y = y_j)$

Lois de probabilités conditionnelles

$$P((X = x_i)/(Y = y_j)) = \frac{p_{ij}}{\sum_k p_{kj}}$$

$$P((Y = y_j)/(X = x_i)) = \frac{p_{ij}}{\sum_k p_{ik}}$$

Covariance

$$Cov(X,Y) = \sum_i \sum_j p_{ij}(x_i - E(X))(y_j - E(Y))$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Propriété : si X et Y sont indépendantes

Alors $Cov(X, Y) = 0$ (La réciproque est fausse)

7.4.2.2 Operations sur les variables aléatoires

Somme

$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ (X et Y indépendantes ou non)

$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$ (X et Y indépendantes ou non)

$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ (X et Y indépendantes)

Combinaisons linéaires

$E(a_1X_1 + a_2X_2 + ...+a_nX_n) = a_1 E(X_1) + a_2E(X_2) +....$

$.....+a_nE(X_n)$

$V(a_1X_1 + a_2X_2 + ...+a_nX_n) = a_1^2V(X_1) + a_2^2V(X_2) +.....$

$.....+a_n^2V(X_n)$ (v.a indépendantes)

Produit

$E(XY) = E(X)E(Y)$ (X et Y indépendantes)

Application aux épreuves répétées

Soit X une v.a associée à une expérience aléatoire

$\mu = E(X)$ et $\sigma = \sigma(X)$

On répète n fois l'expérience, on note Xi (= X) la v.a associée au ième résultat.

$\bar{}$

Soit $S = X1 + X2 + ... + Xn$ et $X = S/n$

$\bar{}$

$E(S) = n\,\mu$ $E(X) = \mu$

$\bar{}$

$V(S) = n\,\sigma^2$ $V(X) = \sigma^2 / n$

$\bar{}$

$\sigma(S) = \sigma\sqrt{n}$ $\sigma(X) = \sigma / \sqrt{n}$

7.4.2.3Principales lois de probabilité variables aléatoires discrètes

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est la fonction qui à tout réel k de X(U), ensemble des valeurs de X, associe la probabilité de l'événement (X = k), que l'on note P(X = k).

Loi de Bernoulli

Schéma de Bernoulli :

Soit une épreuve aléatoire ayant 2 issues possibles

"Succès" probabilité p de réalisation

"Echec" probabilité q = 1- p de réalisation

X variable aléatoire associée

X = 1 en cas de "Succès" P(X= 1) = p

X = 0 en cas de "Echec" P(X= 0) = q

E(X) = p

V(X) = p(1 - p) = pq

Loi Binomiale

X $\rightarrow$B (n,p)

Répétition de n épreuves de Bernoulli **Identiques et Indépendantes**

X v.a. qui prend pour valeur " le nombre de Succès à l'issue des n épreuves".

valeurs possibles : {0, 1, 2 ...,n}

k

$$P(X = k) = C_n\, p^k\, (1-p)^{n-k}$$

E(X) = np et V(X) = npq

7.4.3 Variables aléatoires continue

La notion de variable aléatoire continue et toutes les propriétés qui y sont liées font en grande partie appel à des résultats de calcul intégral.

Fonction de répartition F **F(x) = Pr(X ≤x)**

Hypothèses sur F: F est une fonction continue sur R

Il existe une fonction f de R dans R appelée (Densité de probabilité de X)

Telle que : $\forall t \in \mathbf{R}$ $\mathbf{F(t) =} \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$

Conséquences :

$\forall x_0$, $Pr(X = x_0) = 0$

$F'(t) = f(t)$

$$\forall t \in R,\ f(t) \geq 0 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x0}^{x1} f(x)\,dx$$

7.4.3.1Espérance mathématique E(X)

$$\mathbf{E(X) =} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$$

7.4.3.2Variance et écart-type

$$\mathbf{V(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x)\, dx$$

$$\mathbf{V(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx \; - \; \mathbf{(E(X))^2}$$

$$\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$$

7.4.4 Exercice

La loi de probabilité de Y est donc :

Valeurs de k	-10	0	10	20	30
P(Y = k)	1/9	2/9	1/3	2/9	1/9

Son espérance et sa variance sont :

E(Y) = 10
V(Y) = 1600/9**V** **F**

Encercler V si la réponse est vraie ou F si la réponse est fausse.

7.5Résumé

Pour pouvoir faire des statiques il faut se doter des points essentiels suivants :

La classe médiane ; Variance ; Écart type.

Dans l'Analyse combinatoire il faut connaitre les points suivants:

-Factorielle n !;
-Permutation : E = n ! = n(n-1)(n-2).....1
-Arrangement A_n^k ;
-Combinaison C_n^k

Les lois de probabilités se généralisent sur les probabilités totales et les probabilités conditionnelles.

La notion de variable aléatoire continue et toutes les propriétés qui y sont liées font en grande partie appel à des résultats de calcul intégral.

7.6 Exercice de synthèse

Spécialité : Electrotechnique

Module : Appliquer des notions de mathématiques liées au domaine de l'électrotechnique

Durée : 1h30 mn

But :c'est de familiariser les stagiaires à la résolution des transformées de Laplace

Matériel requis :

- Calculatrice
- Document approprié

Mise en situation :

Une usine fabrique en grande série des pièces susceptibles de présenter un défaut A dans 3% des cas, ou un défaut B dans 7% des cas.
L'apparition d'un défaut est indépendante de l'apparition de l'autre.

Marche à suivre :

Calculer la probabilité qu'une pièce tirée au hasard :
- présente les deux défauts ;
- présente au moins l'un des deux défauts ;
- présente un seul défaut ;
- ne présente aucun défaut.

Résumé générale

L'**intégration** est un concept fondamental en mathématiques, issu du calcul des aires et de **l'**analyse, et utilisé dans de nombreuses branches des mathématiques. L'intégration permet, entre autres, de calculer la surface de l'espace délimité par la représentation graphique d'une fonction.

Les opérations de mesure de grandeurs (longueur d'une courbe, aire, volume, flux...) et de calcul de probabilités étant souvent soumises à des calculs d'intégrales, l'intégration est un outil scientifique fondamental. C'est la raison pour laquelle l'intégration est souvent abordée dès l'enseignement secondaire.

Pour ce faire il faut apprendre le tableau des fonctions usuelles, ainsi les lois d'intégrations sans oublier de vous exercer plus.

Les nombres complexes se révèlent utile dans les domaines de la physique, et notamment dans l'étude des ondes et du courant sinusoïdal soit en électronique ou en électricité. On peut caractériser le comportement d'un dipôle passif linéaire en régime Sinusoïdal avec un nombre complexe que l'on appelle «Z : impédance complexe ».

-On peut chercher le module et l'argument de l'impédance

-On peut utiliser les différentes astuces quand les dipôles sont en parallèle ou en série ou mixte

-On peut faire la linéarisation ou simplifier quand on est en trigonométrie ou bien en calcul d'intégrale.

-On peut déterminer les racines d'une équation du deuxième degré

-On peut ainsi utiliser les différentes formes vues au paravent pour la résolution de n'importe quel problème concernant cette partie dans les modules cités.

Le calcul matriciel c'est l'outil mathématique utilisable pour la loi de Kirchhoff et pour d'autre module.

Les équations différentielles sont très utiles en asservissement, en électronique et en électricité.
On fait appel à ce genre de résolution quand on a à faire à des filtres électriques.

Un électrotechnicien est sensé connaître la transformée de Laplace pour tracer n'importe quel signal de sortie d'un circuit électrique.

Pour pouvoir faire des statiques il faut connaitre les points essentiels suivants :

La classe médiane ; Variance ; Écart type

Dans l'Analyse combinatoire il faut connaitre les points suivants:

-Factorielle n !;-Permutation : E = n ! = n(n-1)(n-2).....1

-Arrangement A_n^k ;

-Combinaison C_n^k

Dans Les lois de probabilités se généralisent sur les points suivants :

-Probabilités totales ;-Probabilités conditionnelles

Dans Les Variables aléatoire se généralisent sur les points suivants :

- Espérance mathématique E(X)
- Variance V(X) et écart-type σ_X ; indépendantes ;Co variance
- Loi de Bernoulli ; Loi Binomiale

-La notion de variable aléatoire continue et toutes les propriétés qui y sont liées font en grande partie appel à des résultats de calcul intégral.

Activité de synthèse

Spécialité : Electrotechnique

Module : Appliquer des notions de mathématiques liées au domaine de l'électrotechnique

Durée : 04 h

But : c'est de familiariser les stagiaires à la résolution des mathématiques dans leur spécialité.

Matériel requis :

- Calculatrice
- Document approprié

Mise en situation :

Cette activité englobe toute les connaissances requise durant le semestre donc il faut résoudre partie par partie.

Calcul intégral
soit

$$I = \int_0^{0,6} f(x)\,dx$$

Résolution d'une équation différentielle
On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 3y' - 4y = -5e^{-x}$
où y est une fonction de sa variable x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

Transformée de Laplace et équation différentielle
L'étude d'un mouvement amorti amène à considérer la fonction f telle que
1. $f(t) = 0$ pour $t < 0$.
2. $f''(t) + 2f'(t) + 2f(t) = e^{-t}$ pour $t > 0$.
3. $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$

Probabilité conditionnelles
L'entreprise a fabriqué en un mois 900 chaudières à cheminée et 600 chaudières à ventouse.

Dans ce lot, 1 % des chaudières à cheminée sont défectueuses et 5 % des chaudières à ventouse sont défectueuses.
On prélève au hasard une chaudière dans la production de ce mois.

Toutes les chaudières ont la même probabilité d'être prélevées.
On considère les évènements suivants :
" La chaudière est à cheminée " ;

" La chaudière est à ventouse ";
"La chaudière présente un défaut ".

Marche à suivre :

Calcul intégral

1. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $I = 3 - 3{,}6e^{-0{,}6}$.
2. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-3} de I.
3. Donner une interprétation graphique du nombre I.

Résolution d'une équation différentielle

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) : $y'' - 3y' - 4y = 0$.
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = xe^{-x}$.
Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales
$f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$

Détermination de la transformée de Laplace de *f*

Nous allons utiliser la transformée de Laplace pour résoudre cette équation différentielle. Pour cela, nous admettons que f et ses dérivées premières et seconde admettent des transformées de Laplace.
On note F la transformée de f. ($F(p) = L[f(t)]$).
1. Calculer en fonction de F(p) :
$L[f''(t)]$, $L[f'(t)]$ et $L[f''(t) + 2f'(t) + 2f(t)]$.,
2. Calculer $L[e^{t}U(t)]$ où U est l'échelon unité.
3. En déduire F(p).

Probabilité conditionnelles

1. Déterminer P(A), P(B) , P(D/A) et P(D/B).
2. Calculer $P(D \cap A)$ et $P(D \cap B)$.
3. En remarquant que $D = (D \cap A) \cup (D \cap B)$, que les évènements $(D \cap A)$ et $(D \cap B)$ sont incompatibles, calculer P(D) et $P(\overline{D})$.

Bibliographie

Ouvrages techniques

Philippe Boursin .Cours de mathématiques, classe terminale D (programme de 1982).

Philippe Boursin .exercices de mathématiques, classe terminale D.

Seymour Lipschutz. Mathématiques pour informaticiens (cours et problèmes).

Jacques V´élu. Analyse et calcul matriciel.

Jean-Michel BERNABOTTO. Cours de statistiques d'IUT.

Sylvain Lafontaine, ing .Document sur La Transformée de Fourier et ses applications en chimie-biologie.

Sites d'internet

http://pagesperso-orange.fr/fabrice.sincere/

http://www.ilemaths.net

http://www.PanaMaths

http://www.Matadoc

ANNEXE 1

Corrigés des exercices pratiques ainsi que les exercices de synthèse, et le corrigé de l'activité de synthèse de tout le module C1

Chapitre N°1

Exercice 1

Faux car F(4)=53.3

Exercice 2

$F(x)= x^2 -1/2x^4 + C$

Exercice 3

F(2)-F(1)= -3/4 +2 Ln 2

Exercice de synthèse 1

1) Pendant dt→ $dw=R.i^2.dt$

2) Pendant T→ $w=\int dw=R.I^2_m\int_0^T sin^2(w.t).dt = 1/2\ R.\ I^2_m.T$

3) $R.\ I^2_{eff}.T= 1/2\ .R.\ I^2_m.T \Longrightarrow Ieff = Im/\sqrt{2}$

Chapitre N°2

Exercice4

IR (5, 2i-2, 5) =-2, 5

IM (5, 2i-2, 5) =5, 2

IR (π) =π

IMπ =0

IR (i) =0

IM i=1

Exercice 5

$Z \times \overline{Z}= 34$

Exercice 6

$IZI=\frac{RLW}{\sqrt{R^{2+}(Lw)^2}}$

Arg(Z)= $\pi/2$ -arctang (Lw/R)

Exercice 7

$Z= [2^{20} , 20\pi/3]$

Exercice 8

A.X1=$(-1-i\sqrt{7})/2$

X2= $(-1+i\sqrt{7})/2$

Exercice de synthèse 2

Z= R + i (Lw-1/C w)
Z réel = R
Zimaginaire = X= Lw-1/Cw
IZI=$\sqrt{R^2 + (Lw - 1/Cw)^2}$
Arg(Z)= arc tang (Lw-1/Cw)/R

Chapitre N°3

Exercice 9

A_3

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exercice 10

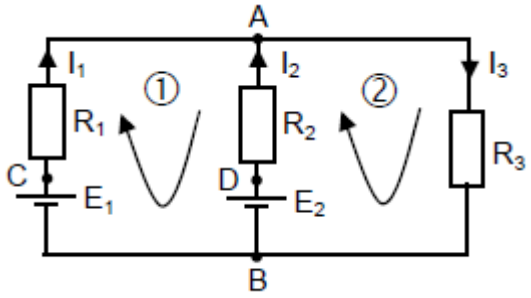
$$A^{-1}= 1\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ \mathbf{-2} & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 11

Les inconnues sont :

x1=2 ; x2=3/2 ; x3=5/2

Exercice de synthèse 3:



Le sens des courants étant inconnues, choisissons-les arbitrairement,

- On a 3 inconnues (I_1, I_2, I_3), il nous faut donc 3 équations indépendantes,
- La loi des Nœuds :

$$\text{Au Nœud A: } I_1 + I_2 = I_3$$

- La loi des mailles :

1er maille - ADBCA: $R_1 I_1 - E_1 + E_2 - R_2 I_2 = 0 \Rightarrow E_2 - E_1 = R_2 I_2 - R_1 I_1 \Rightarrow 5 I_2 - 2 I_1 = 50$

2ème maille - ABDA: $R_3 I_3 + R_2 I_2 - E_2 = 0 \Rightarrow E_2 = R_2 I_2 + R_3 I_3 \Rightarrow 5 I_2 + 10 I_3 = 70$

$I_1 + I_2 = I_3$ $\quad$ $I_1 + I_2 = I_3$ $\quad$ $5 I_2 - 2 I_1 = 50$

$5 I_2 - 2 I_1 = 50 \quad 5 I_2 + 10 I_3 = 70$ $\quad$ $1\,5 I_2 + 10 I_1 = 70$

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 10 & 15 \end{vmatrix} x \begin{matrix} I1 \\ I2 \end{matrix} = \begin{matrix} 50 \\ 70 \end{matrix}$$

Calculons les courants I1 et I2 en appliquant la matrice inverse, et on déduit I3 de la première loi des nœuds.

$$\begin{vmatrix} 15 & -5 \\ -10 & -2 \end{vmatrix} x \begin{vmatrix} 50 \\ 70 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15x50 - 5x70 \\ -10x50 - 2x70 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 400 \\ -640 \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} -5 \\ 8 \end{vmatrix}$$

I1=-5A; I2=8A; I3=3A

Chapitre N°4

Exercice 12

F(x)= $4e^{3(x-1)}$

Exercice 13

F(x) = $e^{-1/4x}(\cos\frac{\sqrt{15}}{4}x+\frac{1}{4\sqrt{15}}\sin\frac{\sqrt{15}}{4}x)$

Exercice de synthèse 4:

Les lois de l'Electricité donnent **$d^2u/dt^2+ 2m\omega_0 du/dt +\omega_0^2 u = \omega_0^2 E$**
Où u est en fait u_C.
Les lois de l'Electricité donnent : **$LC\, d^2u(t) / dt^2 + RC\, du(t) / dt + u(t) = E$**
D'où
Pulsation propre du circuit $\omega 0 = 1/\sqrt{LC}$
Coefficient d'amortissement $m = R/2\sqrt{C/L}$
Résistance critique $R = R_C$ lorsque m = 1

a·f ''(t) + b·f '(t) + c·f(t) = g(t)

a = LC = 0,68.10^{-6}

b = RC = 0, 68.10^{-3}

c = 1

g(t) = E

L'équation caractéristique : $a\cdot r^2+ b\cdot r + c = 0$ avec f'(t) = r

L'équation du discriminant : $\Delta = b^2- 4ac = -2.26.10^{-6}$

$\Delta < 0$Nous avons deux racines complexes conjuguées

$f(t)_{homogène}$ = $e^{-0,5\ 10^3 t}\left[A.\cos(\frac{\sqrt{2.26.10^{-6}}}{1.36.10^{-6}}).t + B.sin\,(\frac{\sqrt{2.26.10^{-6}}}{1.36.10^{-6}}).t\right]$

$f(t)_{générale}$= $f(t)_{homogène}$ + f(t) particulière

$f(t)_{générale} = f(t)_{homogène} + E$

A t = 0 u(t=0)=0

u'(t=0)=0

En remplaçant t par zéro on déterminera les valeurs de A et B

$$\begin{cases} A + E = 0 \\ \alpha A + \beta B = 0 \end{cases} => \begin{cases} A = -E = -4 \\ B = +4.\frac{\alpha}{\beta} = -0.5 \end{cases}$$

f (t)$_{générale}$=

$$e^{-0,5\,10^3 t}\left[-4.\cos\left(\frac{\sqrt{2.26.10^{-6}}}{1.36.10^{-6}}\right).t - 0.5.sin\left(\frac{\sqrt{2.66.10^{-6}}}{1.3610^{-6}}\right).t\right] + 4$$

Chapitre N°5

Exercice 14

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} \pi dx\right) = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \int_{0}^{\pi} \pi \cos(nx)dx = 0, \quad n \geq 1,$$

$$b_n = \int_{0}^{\pi} \pi \sin(nx)dx = \frac{1}{n}(1 - \cos(n\pi)) = \frac{1}{n}(1 - (-1)^n).$$

Exercice 15

F(x) ~2(sin(x) -$\frac{sin(2x)}{2} + \frac{sin(3x)}{3} + \cdots$

Exercice16

Sin k π = 0, donc A_1 = - 2/n^2 ω^{2}T cos n π + 2/n^2 ω^{2}T

Exercice de synthèse 5:

1. la fonction *f* étant paire, on peut écrire que pour tout entier n : $b_n = 0$.

Calcul de a_0 puisque f est paire, donc on a :

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_0^4 f(t)dt = \frac{1}{4}\left(\int_0^1 t dt + \int_1^3 dt + \int_3^4 (4-t)dt\right).$$

D'où $a_0 = \frac{1}{4}\left(\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + [t]_1^3 + \left[-\frac{(4-t)^2}{2}\right]_3^4\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + (3-1) + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$

Remarque : $\int_0^4 f(t)dt$ est aussi l'aire du trapèze OABC. (Le calcul est plus rapide)

Calcul de a_n

$a_n = \frac{2}{T}\int_0^4 f(t)\cos(n\omega t)dt$, comme $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, on obtient

$$a_n = \frac{1}{2}\int_0^4 f(t)\cos(\frac{n\pi}{2}t)dt .$$

La fonction $t \mapsto f(t)\cos(\frac{n\pi}{2}t)$ est paire, donc on peut écrire :

$$a_n = \frac{1}{2}\int_0^4 f(t)\cos(\frac{n\pi}{2}t)dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 t\cos(\frac{n\pi}{2}t)dt + \int_1^3 \cos(\frac{n\pi}{2}t)dt + \int_3^4 (4-t)\cos(\frac{n\pi}{2}t)dt\right)$$

.

La première intégrale nécessite une intégration par parties, en posant :

$u(t) = t$; $u'(t) = 1$

$v'(t) = \cos(\frac{n\pi}{2}t)$; $v(t) = \frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{2}t)$.

Il vient

$$\frac{1}{2}\int_0^1 t\cos(\frac{n\pi}{2}t)dt = \frac{1}{2}\left(\left[t\times\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right)\right]_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right)dt\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{3n\pi}{2}\right) + \frac{2}{n\pi}\left(\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)\right)_0^1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{3n\pi}{2}\right) + \frac{4}{(n\pi)^2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{(n\pi)^2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1\right)$$

.

$$\frac{1}{2}\int_1^3 1\times\cos(\frac{n\pi}{2}t)dt = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{2}t)\right]_1^3 = \frac{1}{n\pi}\left(\sin(\frac{3n\pi}{2}) - \sin(\frac{n\pi}{2})\right)$$

La troisième intégrale nécessite une intégration par parties, en posant :

$u(t) = 4 - t$; $u'(t) = -1$

$v'(t) = \cos(\frac{n\pi}{2}t)$; $v(t) = \frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{2}t)$.

$$\frac{1}{2}\int_3^4 (4-t)\cos(\frac{n\pi}{2}t)dt = \frac{1}{2}\left(\left[(4-t)\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right)\right]_3^4 + \frac{2}{n\pi}\int_3^4 \sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right)dt\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{3n\pi}{2}\right) + \frac{2}{n\pi}\left(-\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)\right)_3^4\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{3n\pi}{2}\right) - \frac{4}{(n\pi)^2}\left(\cos(2n\pi) - \cos\left(\frac{3n\pi}{2}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{3n\pi}{2}\right) - \frac{4}{(n\pi)^2}\left(1 - \cos\left(\frac{3n\pi}{2}\right)\right)\right)$$

$$\frac{1}{2}\int_3^4 (4-t)\cos(\frac{n\pi}{2}t)dt = \left(-\frac{1}{n\pi}\sin\left(\frac{3n\pi}{2}\right) - \frac{2}{(n\pi)^2}\left(1 - \cos\left(\frac{3n\pi}{2}\right)\right)\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{n\pi}\sin\left(\frac{3n\pi}{2}\right) - \frac{2}{(n\pi)^2}\left(1 - \cos\left(\frac{3n\pi}{2}\right)\right)\right)$$

et enfin

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{(n\pi)^2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1\right) + \frac{1}{n\pi}\left(\sin(\frac{3n\pi}{2}) - \sin(\frac{n\pi}{2})\right)$$

$$+ \left(-\frac{1}{n\pi}\sin\left(\frac{3n\pi}{2}\right) - \frac{2}{(n\pi)^2}\left(1 - \cos\left(\frac{3n\pi}{2}\right)\right)\right)$$

$$a_n = \frac{2}{(n\pi)^2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1 + \cos\left(\frac{3n\pi}{2}\right) - 1\right) = \frac{2}{(n\pi)^2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{3n\pi}{2}\right) - 2\right)$$

$$a_n = \frac{2}{(n\pi)^2}\left(2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos(2n\pi) - 2\right) = \frac{2}{(n\pi)^2}\left(2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 2\right) = \frac{4}{(n\pi)^2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1\right)$$

La fonction f étant continue, on peut écrire :

$$f(t) = \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right).$$

$$a_1 = \frac{4}{\pi^2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right) = -\frac{4}{\pi^2}$$;

$$a_2 = \frac{4}{4\pi^2}\left(\cos(\pi)-1\right) = \frac{1}{\pi^2}(-1-1) = -\frac{2}{\pi^2}\ ;$$

$$a_3 = \frac{4}{9\pi^2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)-1\right) = \frac{4}{9\pi^2}(0-1) = \frac{-4}{9\pi^2} \text{ et } a_4 = \frac{1}{4\pi^2}\left(\cos(2\pi)-1\right) = 0.$$

Chapitre N°6

Exercice 17

$F(p) = 2/p^3$

Exercice 18

$$F(P) = \frac{w}{w^2+(p+a)^2}$$

Exercice 19

Le traitement du montage ci-dessus avec les impédances opérationnelles conduit à

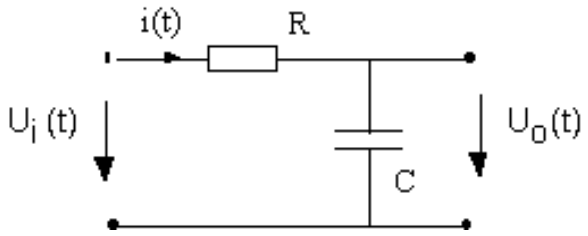
$$U = \frac{E}{p}\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)\frac{1}{1+\frac{R_2R_1C}{R_1+R_2}}$$

$$\text{Soit } u(t) = \left(\frac{ER_2}{R_1+R_2}\right)\left(1-\exp-\left(\frac{(R_1+R_2)t}{R_1R_2C}\right)\right)$$

La tension u(t) suit l'évolution de l'entrée avec une constante de temps

Exercice de synthèse 6:

Soit le circuit RC suivant:



Ses équations temporelles sont données par:

$$i(0) = 0$$

$$R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(s) \cdot ds = U_i(t)$$

$$\frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(s) \cdot ds = U_o(t)$$

Après transformation de Laplace, on obtient:

$$R \cdot I(p) + \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{p} \cdot I(p) = U_i(p)$$

$$\frac{1}{C} \cdot \frac{1}{p} \cdot I(p) = U_o(p)$$

Soit pour la fonction de transfert complexe **:**

$$G(p) = \frac{U_o(p)}{U_i(p)} = \frac{1}{1 + RC \cdot p}$$

Chapitre N°7

Exercice 20

En utilisant la formule donnée ci-dessus, on a donc : V=30,53

On obtient par conséquent la valeur approchée de l'écart type de cette série : σ=5,5cm

- Concrètement, cela signifie que les valeurs de cette série s'écartent en moyenne de 5,5 unités par rapport à la moyenne de cette série qui est d'environ 175 cm.

- Plus la valeur de l'écart type est importante au regard de l'ordre de grandeur des valeurs de la série, plus la série est dispersée. Lorsque son écart type est relativement faible, on qualifiera la série d'homogène.

Exercice 21

Le nombre de résultats possibles lors d'un tel tirage est donc :

C_{49}^{6} =13983816

Exercice 22

Dans un atelier, on s'intéresse à deux machines a et b. La machine fournit 80% des pièces dont 5% sont défectueuses. La machine b fournit 20% des pièces dont 4% sont défectueuses.

Une expérience consiste à choisir au hasard une pièce parmi la production journalière de cet atelier et on souhaite déterminer la probabilité qu'elle soit défectueuse.

On note A : " La pièce a été produite par la machine a", B : " La pièce a été produite par la machine b" et D : "La pièce est défectueuse".

On peut traduire les données en termes de probabilités. On a donc : P(A) = 0,8 ; P(B) = 0,2 ; P(D/A) = 0,05 ; P(D/B) = 0,04.

D'après la formule de la probabilité totale, on peut écrire :

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A \cap D) + P(B \cap D) \\ &= P(A) \times P(D/A) + P(B) \times P(D/B) \\ &= 0,8 \times 0,05 + 0,2 \times 0,04 \\ &= 0,048 \end{aligned}$$

Connaissant maintenant P(D), on peut aussi calculer, en utilisant la définition de la probabilité conditionnelle, la probabilité que la pièce ait été produite par la machine a sachant qu'elle est défectueuse, et la probabilité que la pièce ait été produite par la machine b sachant qu'elle est défectueuse.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} P(A/D) &= P(D \cap A) : P(D) \\ &= P(A) \times P(D/A) : P(D) \\ &= 0,8 \times 0,05 : 0,048 \\ &= 0,833 \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} P(B/D) &= 0,2 \times 0,04 : 0,048 \\ &= 0,167 \end{aligned}$$

Exercice 23

La loi de probabilité de Y est donc :

Valeurs de k	-10	0	10	20	30
P (Y = k)	1/9	2/9	1/3	2/9	1/9

Calculez son espérance et sa variance ? On obtient :

E(Y) = -10 x 1/9 + 0 x 2/9 + 10 x 3/9 + 20 x 2/9 + 30 x 1/9 = 90/9 = 10.
V(Y) = (-10)² x 1/9 + 0² x 2/9 + 10² x 3/9 + 20² x 2/9 + 30² x 1/9 - 10² = 1600/9

Or E(X) = 5 et V(X) = 400/9.

On constate alors que : E(Y) = 2E(X) + 6 et V(Y) = 2²V(X).

Exercice de synthèse 7:

1. Calcul de probabilités simples.
- La pièce présente les 2 défauts :
  Les 2 défauts sont indépendants l'un de l'autre. Donc :

$p(A\cap B)=p(A)\times p(B)=0,03\times 0,07=0,0021$

- La pièce ne présente aucun des 2 défauts.
  On a, pour la même raison :

$p(\overline{A}\cap\overline{B})=p(\overline{A})\times p(\overline{B})=(1-p(A))\times(1-p(B))=0,97\times 0,93=0,9021$

- La pièce présente au moins un des deux défauts. $1-p(\overline{A}\cap\overline{B})=1-0,9408=0,0592$
- La pièce présente un et un seul des deux défauts.

$p(\overline{A}\cap B)+p(A\cap\overline{B})=0,97\times 0,07+0,03\times 0,93=0,0979$

En résumé on a la répartition suivante :

	A	$\overline{A}$	Total
B	0,0021	0,0679	0,07
$\overline{B}$	0,0279	0,9021	0,93
Total	0,03	0,97	1

Activité de synthèse :

Calcul intégral

1.

$$I = \int_0^{0,6} f(x)dx = \int_0^{0,6} (x+2)e^{-x}dx$$

$$\begin{cases} u'(x) = e^{-x} \Rightarrow u(x) = -e^{-x} \\ v(x) = x+2 \Rightarrow v'(x) = 1 \end{cases}$$

$$I = \left[-(x+2)e^{-x}\right]_0^{0,6} - \int_0^{0,6} -e^{-x}dx$$

$$= \left[-2,6e^{-0,6} + 2\right] - \left[e^{-x}\right]_0^{0,6}$$

$$= \left[-2,6e^{-0,6} + 2\right] - \left[e^{-0,6} - 1\right] = 3 - 3,6e^{-0,6}$$

2. I ≃1,024

3. Le nombre I représente en unité d'aire l'aire du domaine plan délimité par la courbe C l'axe des abscisses et les droites d'équation x = 0 et x = 0,6

Résolution d'une équation différentielle

1. (E_0) : y'' - 3y' - 4y = 0

l'équation caractéristique associée est : $r^2 - 3r - 4 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25 > 0$ donc deux solutions réelles distinctes :

$$r_1 = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1, \quad r_2 = \frac{3+5}{2} = 4$$

les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont donc les fonctions *y*

Définies sur $\mathbb{R}$par : $y(x) = Ae^{-x} + Be^{4x}$.

2. $h(x) = xe^{-x}$ donc *h* est deux fois dérivable et pour tout réel *x* on a :

$h'(x) = e^{-x} - x\,e^{-x} = (1 - x)\,e^{-x}$

$h''(x) = -e^{-x} - (1 - x)e^{-x} = (-1 - 1 + x)\,e^{-x} = (-2 + x)\,e^{-x}$

$h''(x) - 3h'(x) - 4h(x) = (-2 + x)\,e^{-x} - 3(1 - x)\,e^{-x} - 4x\,e^{-x} = (-2 + x - 3 + 3x - 4x)e^{-x}$

$h''(x) - 3h'(x) - 4h(x) = -5\,e^{-x}$

donc *h* est bien solution de l'équation différentielle (E).

3.La solution générale de (E) est la somme de la solution générale de (E^0) et de la solution particulière de (E).

Les solutions de l'équation différentielle (E) sont donc toutes les fonctions y définie sur $\mathbb{R}$par $y(x) = Ae^{-x} + Be^{4x} + x\,e^{-x} = (A + x)\,e^{-x} + Be^{4x}$

4. f est une solution de l'équation différentielle (E) donc f définie sur $\mathbb{R}$par :

$f(x) = (A + x)\,e^{-x} + Be^{4x}$ où A et B sont deux constantes réelles à déterminer.

$f'(x) = e^{-x} - (A + x)\,e^{-x} + 4Be^{4x}$

$f(0) = 2 \Leftrightarrow A + B = 2$

$f'(0) = -1 \Leftrightarrow 1 - (A + 0) + 4B = -1 \Leftrightarrow -A + 4B = -2$

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ -A + 4B = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 2 \\ 5B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 0 \end{cases}$$

La solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$ est la fonction f définie par :
$f(x) = (x+2)\,e^{-x}$.

Détermination de la transformée de Laplace de *f*

1.

$L[f''(t)] = p^2 F(p) - pf(0^+) - f'(0^+) = p^2 F(p) - p$

$L[f'(t)] = p F(p) - f(0^+) = p F(p) - 1$

$L[f''(t) + 2f'(t) + 2f(t)] = L[f''(t)] + 2L[f'(t)] + 2L[f(t)] =$
$p^2 F(p) - p + 2p F(p) - 2 + 2F(p) = (p^2 + 2p + 2) F(p) - p - 2$

2.

$$L\left[e^{-t}U(t)\right] = \frac{1}{p+1}$$

3. En déduire F(p).

On a donc :

$$(p^2 + 2p + 2)F(p) - p - 2 = \frac{1}{p+1} \Leftrightarrow$$

$$(p^2 + 2p + 2)F(p) = (p+2) + \frac{1}{p+1} \Leftrightarrow$$

$$F(p) = \frac{p+2}{p^2 + p + 2} + \frac{1}{(p+1)(p^2 + p + 2)}$$

Probabilités conditionnelles

1.Il y a 900 chaudières à cheminée sur un total de 1500 (900 + 600) chaudières donc :

$p(A) = 900/1500 = 9/15 = 3/5 = 0,6$

Il y a 600 chaudières à ventouse sur un total de 1500 chaudières donc :

$p(B) = 600/1500 = 6/15 = 2/5 = 0,4$

1 % des chaudières à cheminée sont défectueuses :

$p(D/A) = 1/100 = 0,01$

5 % des chaudières à ventouse sont défectueuses :

$p(D/B) = 5/100 = 0,05$

2. $P(D \cap A) = P(D/A) \times P(A) = 0,01 \times 0,6 = 0,006$

$P(D \cap B) = P(D/B) \times P(B) = 0,05 \times 0,4 = 0,02$

3. $(D \cap A) \cap (D \cap B) = D \cap A \cap B = D \cap \varnothing = \varnothing$

donc les évènements $(D \cap A)$ et $(D \cap B)$ sont incompatibles, de plus

$D = (D \cap A) \cup (D \cap B)$

$P(D) = P((D \cap A) \cup (D \cap B)) = P(D \cap A) + P(D \cap B) = 0,006 + 0,02 = 0,026$

$P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 0,974.$